Владимирский государственный университет

А. А. МОКРОВА Р. А. КОЗЛИКОВ А. В. ГОНЧАРОВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

Учебное пособие

Владимир 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

А. А. МОКРОВА Р. А. КОЗЛИКОВ А. В. ГОНЧАРОВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

Учебное пособие

Электронное издание

Владимир 2022

ISBN 978-5-9984-1679-8
© Мокрова А. А., Козликов Р. А., Гончаров А. В., 2022
УДК 53.01
ББК 22.31

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры технологического и экономического образования
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
В. А. Игонин

Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры современного образования
Российского университета кооперации (Владимирский филиал)
В. В. Красильщиков

Мокрова, А. А. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. А. Мокрова, Р. А. Козликов, А. В. Гончаров ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2022. – 243 с. – ISBN 978-5-9984-1679-8. – Электрон. дан. (2,76 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

В пособии рассмотрены основные темы раздела «Механика», описаны логика построения физической теории и подходы к измерению физических величин, представлены примеры решения типовых задач, образцы оформления и раскрытия физического смысла задач, приведены задания для самостоятельного решения.

Предназначено для учащихся 10 – 11 класса, адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Ил. 159. Библиогр.: 16 назв.

ISBN 978-5-9984-1679-8
© Мокрова А. А.,
Козликов Р. А., Гончаров А. В., 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ 6
1.1. Предмет физики и ее связь с другими науками 6
1.2. Методы физических исследований. Характер физических законов 7
1.3 Реальные объекты и идеализированные схемы 8
1.4. Измерение физических величин 9
1.5. Свойства 14
1.6. Графическое представление результатов измерений 15
1.7. Методические указания к решению физических задач 17
Глава 2. КИНЕМАТИКА 25
2.1. Система отсчета 25
2.2. Перемещение и скорость 27
2.3. Ускорение 30
2.4. Поступательное движение твердого тела 33
2.5. Вращательное движение твердого тела. Угловая скорость и угловое ускорение 31
2.6. Сложное движение. Теорема сложения скоростей 37
2.7. Задачи 39
2.7.1. Примеры решения задач 41
2.7.2. Задачи для самостоятельного решения 49
Глава 3. ДИНАМИКА 52
3.1. Первый закон Ньютона. Принцип относительности Галилея 52
3.2. Второй закон Ньютона. Сила, масса 57
3.3. Третий закон Ньютона 62
3.4. Механическая система. Закон сохранения количества движения 63
3.5. Силы, действующие на точку при криволинейном движении 65
3.6. Твердое тело как система материальных точек. Центр массы 68
3.7. Момент силы, момент инерции 72
3.8. Основной закон вращательного движения твердого тела 74

3.9. Пара сил 76
3.10. Перенос точек приложения сил 78
3.11. Закон сохранения импульса 79
3.12. Закон сохранения момента количества движения 81
3.13. Задачи 82
3.13.1. Примеры решения задач 84
3.13.2. Задачи для самостоятельного решения 99
Глава 4. ВИДЫ СИЛ 105
4.1. Закон всемирного тяготения 105
4.2. Изменение силы тяжести в зависимости от географической широты и высоты 107
4.3. Постоянная тяготения. Опыты Кавендиша 109
4.4. Масса инертная и масса гравитационная 110
4.5. Возникновение деформаций 113
4.6. Виды деформаций 117
4.7. Закон Гука 120
4.8. Силы трения. Трение покоя и трение скольжения 124
4.9. Трение качения 130
4.10. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции 132
4.11. Вращающиеся системы отсчета 138
Глава 5. ЭНЕРГИЯ И РАБОТА 143
5.1. Энергия, работа, мощность 143
5.2. Кинетическая энергия 146
5.3. Потенциальная энергия 148
5.4. Закон сохранения и превращения энергии в механике 153
5.5. Задачи 155
5.5.1. Примеры решения задач 156
5.5.2. Задачи для самостоятельного решения 166
Глава 6. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ 171
6.1. Гармонические колебания 171
6.2. Математический маятник и физический маятники 175
6.3. Энергия гармонического колебательного движения 178
6.4. Затухающие колебания 178
6.5. Вынужденные колебания. Резонанс 181
6.6. Сложение гармонических колебаний 185
6.7. Механические волны 188

6.8. Интерференция волн. Стоячие волны 192
6.9. Принцип Гюйгенса 195
6.10. Основные характеристики звука 196
6.11. Эффект Доплера 199
6.12. Источник звука 200
6.13. Ультразвук 202
6.14. Задачи 204
6.14.1. Примеры решения задач 204
6.14.2. Задачи для самостоятельного решения 209
Глава 7. МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ 213
7.1. Стационарное течение идеальной жидкости. Уравнение Бернулли 213
7.2. Движение вязкой жидкости 218
7.3. Движение тел в жидкостях и газах 220
7.4. Задачи 223
7.4.1. Примеры решения задач 223
7.4.2. Задачи для самостоятельного решения 226
Глава 8. МЕХАНИКА КОСМИЧЕСКИХ ПОЛЕТОВ 230
8.1. Принцип реактивного движения 230
8.2. Движение тел с переменной массой 233
8.3. Первая, вторая и третья космические скорости 235
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 239
СПИСОК БИБЛИОГРАФИЧЕСКИХ ССЫЛОК 241

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ

1.1. Предмет физики и ее связь с другими науками

Мир представляет собой совокупность материальных объектов, находящихся в постоянном взаимодействии и непрерывном движении. Под материальными объектами (или просто материей) понимается все то, что существует объективно, т.е. независимо от нас и нашего сознания. Познается материя через наши ощущения. В ряде случаев восприятие материи может осуществляться не только непосредственно нашими органами чувств, но и с помощью различного вида приборов. Так, например, электромагнитные волны с длинной волны больше 0,1 мм воспринимаются колебательным контуром, молекулы могут быть видимы лишь в электронный микроскоп и т.д. Однако, это не означает, что до создания колебательного контура и электронного микроскопа электромагнитных волн и молекул не было в природе. Они существовали независимо от нас и нашего сознания, существовали и до того, как на земле появился человек.

На современном уровне развития физики различают *два вида материи – вещество и поле*.

Неотъемлемым *свойством материи* является *движение*.

Определение. Движение – это любое изменение материи, всякий происходящий в природе процесс: физический, химический, биологический, общественный.

Движение – это форма существования материи. Это значит, что без движения материя существовать не может. И наоборот – движения без материи тоже нет. Бессмысленно говорить о движение, не связывая его с каким-то материальным объектом.

Движение может происходить только в пространстве и во времени. Таким образом, *пространство* и *время*, как и движение, являются *формами существования материи*.

Итак, мир есть закономерное движение материи, совершающееся в пространстве и во времени.

Каждая наука занимается изучением определенных форм движения материи. Физика изучает физические формы движения материи, такие как механическое, тепловое, электромагнитное, внутриа-

томное и внутриядерное движения. Это наиболее простые и наиболее общие формы движения материи.

Механика занимается изучением простейшей формы физического движения материи – механического движения.

Определение. Механическое движение – это изменение взаимного положения тел с течением времени.

1.2. Методы физических исследований. Характер физических законов

Определение. Совокупность изменений, происходящих с определенными материальными объектами, с течением времени называют *физическим явлением* или *процессом*.

Эти изменения можно оценивать количественно с помощью физических величин и измерений.

Физические величины характеризуют свойства тел (например, масса) или являются характеристиками процессов (например, ускорение).

Измерение физических величин сводится к сравнению данной величины с определенной величиной того же рода, принятой за единицу (эталон).

Простейший вид физического исследования – *наблюдение*. Оно заключается в изучении явления в естественных условиях при сохранении всех связей наблюдаемого явления с другими. Эти связи создают побочные эффекты, часто мешающие сделать правильные выводы. Например, при наблюдении падения листа бумаги и монеты мы не можем исключить сопротивление среды, а поэтому приходим к выводу, что различные тела падают с разными ускорениями.

Второй ступенью физического исследования является опыт или *эксперимент*.

Определение. Физическим опытом называют воспроизведение явления в искусственных условиях, позволяющих исключить побочные эффекты.

Так, например, поместив лист бумаги и монету в трубку и откачав из нее воздух, мы исключим сопротивление среды.

На основе накопленного экспериментального материала строится предварительное научное предположение о механизме и причинно-

следственной взаимосвязи целой области явлений – *научная гипотеза*.

Она требует проверки и доказательства. Гипотезы, следствия из которых противоречат опыту, оказываются ошибочными и отбрасываются (например, гипотезы теплорода, эфира и т.п.). Если же опыт подтверждает гипотезу, и она правильно предсказывает ряд новых явлений, то гипотеза превращается в научную теорию (например, молекулярно-кинетическая теория, электронная теория и т.п.).

На основе наблюдений и опытов открываются закономерные связи между явлениями, вскрывается причинно-следственная взаимосвязь между ними. Эти общие закономерности, которым подчиняется течение различных процессов, называются *физическими законами*. Обычно физический закон содержит некоторое утверждение относительно связей между теми или иными физическими величинами.

Отметим, что все физические законы носят объективный характер, т.е. не зависят от сознания и воли человека. Вполне понятно, что они существовали в природе и до их открытия. Кроме того, каждый закон имеет определенные границы применимости.

1.3. Реальные объекты и идеализированные схемы

Одни свойства реальных объектов существенно влияют на ход явлений или их результат, а другие практически на это не влияют.

Чтобы было возможно сделать теоретический анализ явлений мы вынуждены заменить реальные объекты *упрощенными идеализированными схемами (моделями)*, лишь приближенно отражающими свойства реального объекта. Без подобного упрощения самые простые явления приводили бы нас к очень сложным, практически неразрешимым теоретическим задачам.

Так как теория пользуется идеализированными схемами, то она может охватывать лишь ограниченный круг явлений реального мира. Только опыт может оправдать использование той или иной идеализации.

Таким образом, мерилом теории является опыт. В механике используются идеализированные схемы (модели):

1) *материальная точка* (мт) – точка, обладающая массой (иногда размерами тела можно пренебречь);

2) *система материальных точек* (смт) – совокупность взаимосвязанных материальных точек;

3) *абсолютно твердое тело* (атт) – система жестко связанных материальных точек (тело с неизменной формой и размерами).

1.4. Измерение физических величин

Определение. *Измерение физической величины* – это сравнение ее с другой однородной с ней величиной, принятой за единицу.

Определение. Однородными называют такие физические величины, которые характеризуют одно и то же свойство материи или являются одной и той же характеристикой процесса и могут отличаться только численно.

Измерения физических величин разделяют на *прямые* и *косвенные*.

1) *Прямые измерения* – измерения, результат которых сразу дает искомую величину. Например, измерение длинны масштабной линейкой, времени – секундомером, силы – динамометром.

2) *Косвенные измерения* – измерения, результат которых получается путем производства каких-либо математических операций над результатом прямых измерений величин, связанных с искомой величиной определенной формулой. Например, измерение ускорения силы тяжести по измеренной длине маятника и времени его колебания.

Измерения физических величин являются приближенными, так как вследствие неточности измерительных приборов и несовершенства органов чувств, неполноты знаний и трудности учета всех побочных явлений при измерениях неизбежно возникают *погрешности*. Однако, в каждом конкретном случае можно указать пределы, внутри которых заключена измеряемая величина. Чем совершеннее измерительный прибор и методика измерений, тем более узки пределы, определяющие величину погрешности.

При выполнении лабораторной работы необходимо произвести измерения так, чтобы отклонение полученного значения измеряемой величины от истинного было как можно меньше. Кроме того, необходимо дать оценку той погрешности, которая получилась при данном измерении.

Погрешности или ошибки бывают систематическими или *случайными*.

Систематическими называют погрешности, обусловленные несовершенством измерительного прибора (например, пластмассовые линейки с течением времени укорачиваются на несколько миллиметров, секундомер может иметь неправильный ход – спешить или отставать на несколько секунд) или ошибочностью его использования (например, перед взвешиванием не установлено равновесие ненагруженных весов). Систематические погрешности всегда имеют один и тот же знак, то есть систематически повторяются. Эти ошибки устраняются введением поправок.

Случайные погрешности являются результатом случайных факторов, которые заранее невозможно учесть (несовершенство органов чувств, влияние внешних условий). Случайные ошибки могут изменять результат в обе стороны, то уменьшая его, то увеличивая. Оба знака случайных погрешностей равновероятны. Эти ошибки устранить нельзя, так же как нельзя заранее определить их знак.

Промахи и неточности – это ошибки, возникающие в результате небрежности отсчета по приборам или неразборчивости в записи их показаний. Для их устранения необходимо сделать повторное (контрольное) измерение.

Степень точности измерений, в основном, определяется точностью измерительного прибора. Под точностью прибора подразумевается та наименьшая величина, которую еще можно определить вполне надежно. Точность прибора определяется ценой (значением) наименьшего деления его шкалы.

Оценку точности измерений можно сделать, указав абсолютную погрешность измерений.

<u>Определение.</u> *Абсолютной погрешностью* Δa измерения физической величины x называется разность $x - a$, где a – измеренное значение величины x:

$$\Delta a = x - a.$$

Абсолютная погрешность Δa имеет размерность измеряемой величины. Так как знак абсолютной погрешности случаен, то $x = a \pm \Delta a$, что означает: $a - \Delta a \leq x \leq a + \Delta a$.

Следовательно, знание абсолютной погрешности позволяет узнать интервал, внутри которого заключено истинное значение из-

меряемой величины, но абсолютная погрешность сама по себе не дает полного представления о точности измерения. Точность измерения характеризуется еще относительной погрешностью.

Определение. *Относительной погрешностью* E называется отношение абсолютной погрешности к результату измерения:

$$E = \frac{\Delta a}{a} \text{ или } E = \frac{\Delta a}{a} \cdot 100\%.$$

Часто приходится по вычисленной относительной погрешности находить абсолютную погрешность: $\Delta a = Ea$.

Вычисление погрешностей прямых измерений можно произвести следующим образом.

Если величина x измерена n раз с одинаковой степенью точности, то наиболее достоверным значением искомой величины будет ее среднее значение

$$a_{cp} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

где a_i – результат -го прямого измерения искомой величины.

Разности между средними значениями измеряемой величины $a_{\text{ср}}$ и значениями при отдельных измерениях являются абсолютными погрешностями отдельных измерений. Они могут быть и положительными и отрицательными:

$$\Delta a_i = a_{cp} - a_i,$$

здесь Δa_i – абсолютная погрешность -го измерения величины x.

Для определения максимальной средней абсолютной погрешности результата берут среднее арифметическое модулей абсолютных ошибок:

$$\Delta a_{cp} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\Delta a_i|.$$

Максимальная средняя относительная погрешность результата многократных прямых измерений

$$E = \frac{\Delta a_{cp}}{a_{cp}},$$

а истинное значение искомой величины x:

$$a_{\text{ист}} = a_{cp} \pm \Delta a_{cp}.$$

При записи выражения необходимо сопоставить значения Δa_{cp} с той погрешностью, которая определяется прибором $\Delta a_{\text{пр}}$, которая равна точности измерительного прибора. Иногда эту погрешность считают равной половине цены наименьшего деления шкалы прибо-

ра, если она не указана на прибое. Если окажется, что $\Delta a_{ср} < \Delta a_{\text{пр}}$, то в выражении истинного значения $a_{\text{ист}}$ искомой величины следует $\Delta a_{ср}$ заменить на $\Delta a_{\text{пр}}$.

При однократном прямом измерении величины x

$$a'_{\text{ист}} = a' \pm \Delta a_{\text{пр}},$$

где a' - результат отсчета по прибору.

Следует обратить внимание на то, что запись результата отсчета по прибору должна отражать точность измерения величины данным прибором. Например, запись результата 56 см свидетельствует о том, что длинна измерена с точностью до 1 см, и, что экспериментатор пользовался масштабной линейкой с ценой наименьшего деления в 1 см. Запись 56,0 см – свидетельствует о большей степени точности измерения той же длинны и о том, что измерение проводилось масштабной линейкой с миллиметровыми делениями.

Вычисление погрешностей результатов косвенных измерений можно осуществить так:

Пусть величина N вычисляется по формуле: $N = \frac{a+b}{b}$, где a и b – получены прямыми измерениями, то есть:

$$a = a_{ср} \pm \Delta a_{ср} \text{ и } b = b_{ср} \pm \Delta b_{ср}.$$

Надо определить $N_{ср}$ и $\Delta N_{ср}$. Среднее значение находится по формуле

$$N_{ср} = \frac{a_{ср}+b_{ср}}{b_{ср}}.$$

Отдельные величины a и b могут быть измерены один раз. Максимальная средняя абсолютная погрешность:

$$\Delta N_{ср} = E \cdot N_{ср}.$$

Определить относительную погрешность E немного сложнее. Можно использовать дифференциальное исчисление.

Так как дифференциал натурального логарифма

$$d(\ln N) = \frac{dN}{N}, \text{ то } \Delta(\ln N) = \frac{\Delta N}{N}.$$

Замена знака дифференциала знаком ошибки Δ правомерна, так как ошибки измерения обычно невелики и их можно рассматривать как бесконечно малые величины. Таким образом

$$E = d(\ln N),$$

т.е. относительная погрешность результата косвенного измерения равна полному дифференциалу натурального логарифма функции,

выражающей зависимость данной величины от измеряемых непосредственно величин.

Для нахождения относительной погрешности результата косвенного измерения логарифмируют расчетную формулу, а затем полученное выражение дифференцируют с последующей заменой знаков дифференциалов знаками абсолютных ошибок. Если ошибка отдельной величины входит в результат дифференцирования несколько раз, то после дифференцирования следует сгруппировать все члены, содержащие данную ошибку, вынося ее за скобки.

При расчете максимальной относительной погрешности выражения в скобках берутся по модулю, значения абсолютных погрешностей прямых измерений считаются положительными.

В расчетную формулу, определяющую исходную величину, входят иногда величины, значения которых взяты из таблицы. Абсолютная погрешность каждой такой величины принимается равной половине или единице разряда последней цифры.

Если в лабораторной работе проверяется равенство двух выражений: $N_1 = N_2$, то результат работы считается удовлетворительным, если $|N_1 - N_2| \leq \Delta N_1 + \Delta N_2$.

Числовые значения величин, полученных при измерении или взятых из таблиц, являются приближенными. Поэтому вычисления, производимые при выполнении лабораторных работ, также будут приближенными.

При сложении и вычитании приближенных чисел окончательный результат округляется так, чтобы он не имел значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из приближенных данных. Значащими цифрами называются все верные цифры кроме нулей, стоящих впереди числа. Если абсолютная погрешность величины не превышает одной единицы разряда последней цифры числа, то говорят, что у данного числа все цифры верны.

При умножении и делении приближенных чисел в окончательном результате оставляют такое же число значащих цифр, какое имеется у сомножителя с наименьшим числом цифр.

При возведении в степень в результате берут столько значащих цифр, сколько их имеется в основании степени.

При извлечении корня в результате берут столько значащих цифр, сколько их имеется в подкоренном выражении.

Логарифм приближенного числа должен содержать столько значащих цифр, сколько их имеет данное число.

Принято вычислять в результатах на одну цифру больше, чем следует из вышеизложенных правил. Ее сохраняют, если полученный результат является промежуточным, и отбрасывают (с соблюдением правил округления) в конечном результате.

1.5. Свойства

1) Абсолютная погрешность алгебраической суммы равна сумме алгебраических погрешностей.

$$y = a + b\ ;$$

$$y = f(a, b);\ a = x,\ b = c;$$

$$dy = \frac{\partial f}{\partial a} * da + \frac{\partial f}{\partial b} * db = da + db;$$

$$\Delta y = \Delta a + \Delta b;$$

$$y = a - b;\ dy = da - db;\ \Delta y = \Delta a + \Delta b.$$

Пример: Пусть искомая величина x находится как сумма a и b, абсолютные погрешности измерений которых равны Δa и Δb. Тогда можно записать, что $x = a + b$ и $x \pm \Delta x = (a \pm \Delta a) + (b \pm \Delta b)$. Вычитая почленно из второго равенства первое, получим: $\pm\ \Delta x = \pm\ \Delta a \pm \Delta b$. Отсюда максимальная абсолютная погрешность величины x равна: $\Delta x = \Delta a + \Delta b$.

2) Относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей всех множителей.

$$y = a \cdot b;$$

$$dy = \frac{\partial f}{\partial a} \cdot da + \frac{\partial f}{\partial b} \cdot db = b \cdot da + a \cdot db;$$

$$\Delta y = b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b;$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b}{a \cdot b} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}.$$

Теорема справедлива для любого числа множителей

Пример: Пусть величина $x = ab$, тогда $x \pm \Delta x = (a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b) = ab \pm a\Delta b \pm b\Delta a \pm \Delta a \Delta b$.

Значение абсолютной погрешности как правило мало по сравнению с самой величиной, а поэтому произведением двух малых величин $\Delta a \Delta b$ можно пренебречь. Тогда после почленного вычитания из второго равенства первого, максимальная погрешность равна $\Delta x = a\Delta b \pm b\Delta a$.

3) Относительная погрешность частного равна сумме относительных погрешностей делителя и делимого.

$$y = \frac{a}{b};$$

$$dy = \frac{1}{b} \cdot da + a\left(-\frac{1}{b^2}\right) da = \frac{da}{b} - \frac{a}{b^2} db;$$

$$\Delta y = \frac{\Delta a}{b} + \frac{a}{b^2} \Delta b = \frac{a}{b}\left(\frac{\Delta a}{b} + \frac{\Delta b}{a}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\frac{a}{b}(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b})}{\frac{a}{b}} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}.$$

4) Относительная погрешность степени равна показателю степени умноженного на относительную погрешность основания.

$$y = a^n;$$

$$dy = n \cdot a^{n-1} \cdot da;$$

$$\Delta y = n \cdot a^{n-1} \cdot \Delta a;$$

$$\Delta y = \frac{n \cdot a^{n-1} \cdot \Delta a}{a^n} = n \cdot \frac{\Delta a}{a}.$$

Замечание: теорема справедлива для любого степенного показателей не обязательно целого.

1.6. Графическое представление результатов измерений

При обработке результатов измерений в ряде случаев пользуются графикам.

Определение. *График* – это геометрическое изображение функциональной зависимости при помощи линии, в частности, на плоскости.

Виды графиков разнообразны и зависят от того, какая система координат на плоскости положена в их основу. В большинстве случаев графики строятся в декартовых прямоугольных координатах. Если

система координат выбрана, то график функции $f(x)$ есть не что иное, как множество или, как говорят, «геометрическое место» тех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = f(x)$.

Чтобы графически изобразите, исследуемую в определенной лабораторной работе ту или иную функциональную зависимость, на оси абсцисс отмечают ряд значений $x_1, x_2, x_3, \ldots$ одной из переменных (обычно аргумента), а на оси ординат соответствующее значения другой переменной величины $y_1, y_2, y_3, \ldots$ (функции). Так на плоскости получают ряд точек $M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2), M_3(x_3,y_3), \ldots$ Местонахождение этих точек на плоскости не является строго фиксированным, так как координаты x_i и y_i известны с некоторой абсолютной погрешностью Δx_i и Δy_i. Таким образом, можно говорить о «размере» этих экспериментальных точек, зависящих как от точности измерений, так и от выбранного масштаба. Поскольку $y_1 = y_1 \pm \Delta y$, а $x_1 = x_1 + \Delta x$, то точка $M_1(x_1,y_1)$ превращается в некоторую область $M_1(x_1,y_1)$, заштрихованную на чертеже (рис. 1.1, а).

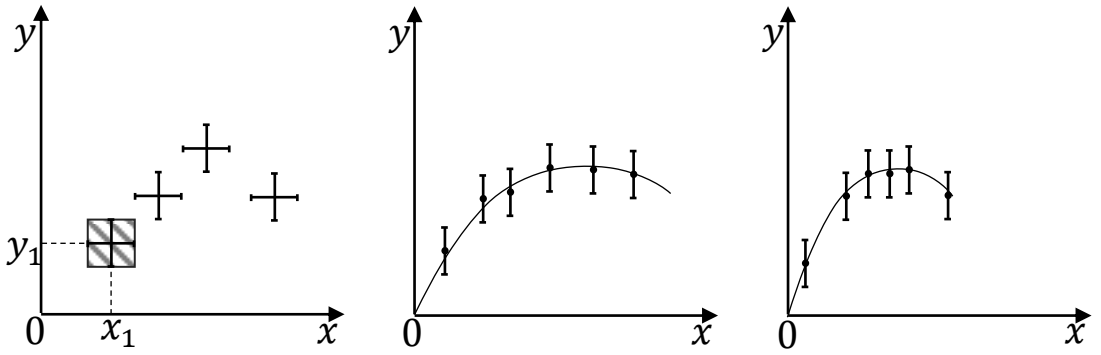


Рис. 1.1

В большинстве случаев масштабы по осям координат выбирают не одинаково. По осям координат следует, с одной стороны выбирать такими, чтобы интервалы Δx и Δy были достаточно заметными на чертеже, а с другой стороны, использовать при построении графика всю площадь между осями координат. Для этого в начале координат не обязательно должен стоять 0, а масштабы по осям выбираются так, чтобы график не «прижимался» к одной из осей. Масштаб должен соответствовать той точности, с которой найдены величины, откладываемые по осям координат. Лучше брать масштаб таким, чтобы величина абсолютной погрешности соответствовала отрезку менее 1 мм (графики выполняются миллиметровой бумаге). При построении графиков необходимо указывать не только откладываемые по осям вели-

чины, но и единицы их измерений. Значения отдельных отрезках координатных осей обозначаются через (10÷20) мм. При изображении на координатной плоскости точек полагается указывать в виде прямых отрезков интервалы, внутри которых заключены истинные значения откладываемых на осях координата величин.

Если величина одной из координат (например x) известна, то на графике показывают только величину Δy (рис. 1.1, б).

В большинстве случаях приходится, наносить на бумагу достаточно большое число точек M. По этим точкам проводится линия – график исследуемой функциональной зависимости (эта операция всегда не столько произвольная; во всяком случае, она имеет смысл лишь в предположение непрерывности функции в исследуемом интервале значений).

Сам график проводится не по точкам, а с учетом площадей вокруг них или отрезков.

При вычерчивании линии нужно следить, чтобы она была плавной, касалась большинства точек и не выходила за пределы отрезков, обозначающих абсолютные погрешности (рис. 1.1, б).

Линия может проходить не через отмечены точки, а близко к ним, чтобы эти точки находились по обе стороны от линии на одинаковом. Следует иметь в виду, что пересечение координатных осей не обязательно должно совпадать с нулевыми значениями x и y. При выборе начала координат и масштаба следует руководствоваться тем, чтобы наилучшим образом использовалась вся площадь чертежа, а линия не получалась слишком крутой или слишком пологой.

При этом измеренные точки должны быть расположены по всей исследуемой области достаточно равномерно, но сгущаться там, где функция быстро изменяет свое значение (рис. 1.1, в).

1.7. Методические указания к решению физических задач

Для решения задач недостаточно знание явлений, взаимодействий и их законов, но ещё необходимо знание методов, приемов, общих для решения определенных групп задач.

При решении задач по любому разделу «Общей физики» желательно придерживаться определенной последовательности рассуждений, каждое утверждение которого в какой-то мере опирается на

предыдущее высказывание. Можно предложить следующий порядок следования отдельных действий при решении физической задачи.

1) Чтение текста задачи, записывание значений величин из текста и таблиц с указанием искомых (в тетради, на доске, в контрольной работе, в экзаменационных материалах) с помощью принятой символики; повторение по памяти текста задачи (нельзя приступать к решению задачи, не запомнив её содержание). Перевод значений величин в выбранную систему единиц с письменным указанием последней (в данном пособии система единиц СГС или СИ указывается перед записью значений величин).

2) Рассмотрение тех физических явлений и взаимодействий (по тексту задачи), законы которых будут применяться в решении задач; при этом можно указать те абстракции, которые либо упрощают явления и взаимодействия, либо являются основанием для применения упомянутых выше законов (назовем это второе действие раскрытием физического смысла задачи).

3) Выполнение чертежа, который используется в решении задачи, либо является дополнением к физическому смыслу задачи. Главные элементы чертежа (в «Механике» – это, в основном, изображение векторных величин, их составляющих или проекций) выполняются крупно толстыми линиями, второстепенные элементы чертежа – мельче и тонкими (или пунктирными) линиями.

4) Составление с помощью указанных выше (в п. 2) законов системы уравнений, полной для решения данной задачи.

5) Решение системы уравнений относительно неизвестных (искомых) величин и получение расчетной формулы (формулы, которая выражает неизвестную величину через известные). Алгебраические преобразования желательно делать где-то в черновых записях, а в чистовом варианте решения задачи после системы уравнений записывается только расчетная формула.

6) Подстановка в расчетную формулу числовых значений известных из текста задачи и взятых из таблиц величин с обозначениями их единиц измерения в том же порядке, в каком величины располагаются в расчетной формуле, и записывание значения искомой величины с точностью, которая следует из правил действий с приближенными числами (в рекомендуемых студентам сборниках задач ответы отдельных задач приводятся без учета правил действий с при-

ближенными числами, что не способствует выработке у студентов привычки соблюдать при вычислениях эти правила).

7) Если задача является не чисто расчетной, а что-то в ней исследуется, сопоставляется, то формулируется соответствующий вывод (письменно, устно).

Примечание. Словесное (письменное – в тетради, в контрольной работе, устное – у доски, на экзамене) решение физической задачи, включающее физический смысл задачи, названия всех элементов чертежа, названия всех уравнений (формул) и величин, входящих в эти уравнения (по возможности, без повторов) способствует лучшему развитию навыков решения задач и облегчает повторение решенных задач при подготовке к контрольной работе, к экзамену.

Методические указания к решению физических задач на тему: «**Кинематика материальной точки и абсолютно твердого тела**»

Во всех кинематических задачах рассматривается одно физическое явление – механическое движение (а оно относительно) какого-то (каких-то) материальных объектов. Поэтому в физическом смысле задачи в первую очередь выбирается система отсчета с указанием (при поступательном движении) тела отсчета, системы координат (декартовой, естественной или обеих), числа осей, их положения и направления; указывается положение начала координат на теле отсчета, выбирается начальный момент времени. При вращательном движении абсолютно твердого тела в качестве тела отсчета берется неподвижная плоскость Q, в которой находится ось вращения тела; координатой, определяющей положение тела в любой момент времени, является двугранный угол между двумя плоскостями Q и P, пересекающимися по оси вращения тела (плоскость P связана с вращающимся телом). За начальный момент времени обычно берется момент совпадения указанных плоскостей.

Затем называется вид движения тела. При поступательном движении тело либо заменяется материальной точкой, либо выбирается какая-то точка тела, движение которой затем и рассматривается в решении задачи. При вращательном движении тело материальной точкой заменять нельзя, но, иногда, кроме вращения тела рассматривается ещё движение какой-то точки тела.

Вид движения тела (материальной или геометрической точки тела) указывается для того, чтобы в систему уравнений включать те формулы, которые справедливы для указанного движения материального объекта. При этом одни и те же кинематические законы (формулы) в одной и той же задаче могут использоваться не один раз в зависимости от промежутка времени движения (при этом, целесообразно, эти промежутки времени измерять от одного и того же начального момента времени).

В случае сложного движения абсолютно твердого тела, например, при его качении, надо указать, каким образом лучше рассматривать это движение: или как вращение вокруг мгновенной оси, или как сумму двух движений (одно из них – поступательное движение со скоростью центра масс, другое – вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр масс тела).

В задачах, в которых идет речь о движении нескольких тел (материальных точек) система отсчета берется одна.

В некоторых задачах движение одного тела рассматривается в нескольких (чаще всего в двух) системах отсчета; в этом случае надо ещё называть вид движения одной системы отсчета относительно другой (других) системы отсчета.

На чертеже кинематической задачи, рассматривающей движение материальной точки, изображается тело отсчета. Оси (декартовые, естественные) координат (их начало, положение, направление и название), векторы начальной скорости и ускорения материальной точки, траектория движения и какие-то точки на ней, а также другие элементы, которые следуют из текста задачи и используются в её решении.

При вращательном и сложном движении изображается движущееся тело и плоскости Q и P, иногда – угловой путь, угловая скорость (как правило, начальные), угловое ускорение и, в зависимости от характера подхода к рассмотрению сложного движения тела, - линейные кинематические величины.

При одновременном движении тела (материальной точки) в нескольких системах отсчета изображаются линейные (угловые) кинематические характеристики движения одной системы отсчета относительно другой (других) системы отсчета.

Чертеж желательно выполнять не шаблонно, формально, следуя каким-то наставлениям, а творчески, так, чтобы он дополнял физический смысл задачи и служил составлению системы уравнений, которая и дает ответы на поставленные в задаче вопросы.

Методические указания к решению физических задач на тему: «**Динамика материальной точки и абсолютно твердого тела**»

Если в кинематической задаче при раскрытии физического смысла указывается, в какой системе отсчета, какой материальный объект движется с названием вида движения последнего, то в динамической задаче помимо механического движения рассматривается механическое взаимодействие и дополнительно выясняется, является ли выбранная система отсчета инерциальной или неинерциальной, а также под действием каких сил или моментов сил происходит движение абсолютно твердого тела (равновесие тела в выбранной системе отсчета можно считать частным случаем движения, когда у тела нет ускорения); то есть главное внимание в этих задачах уделяется силам (со стороны каких тел они действуют, как направлены, где они приложены и что является плечами сил; для сил инерции нет тел, со стороны которых они действуют).

Чертеж динамической задачи помимо некоторых элементов чертежа кинематической задачи включает в себя изображение движущегося тела и действующих на него сил (с соблюдением масштаба), а также – плеч сил (при вращательном движении или в задаче на равновесие тела). Оси координат лучше выбирать так, чтобы левая часть основного закона динамики поступательного (вращательного) движения тела в проекции на ось координат равнялась её модулю с положительным знаком (одну из осей координат для этого направляют по вектору линейного или углового ускорения). При решении задач на равновесие тела (в ИСО и в НИСО) декартовы оси координат, используемые для проектирования равенств $\vec{0} = \sum \vec{F}$ и $\vec{0} = \sum \vec{M}$, выбираются, как всегда, произвольно, но для рационального решения задачи при проектировании равенства $\vec{0} = \sum \vec{F}$ оси координат берутся по возможности либо параллельно, либо перпендикулярно линиям действия сил, а для проектирования равенства $\vec{0} = \sum \vec{M}$ оси координат проводятся в направлении, перпендикулярном плоскости действия сил через точку приложения какой-то (каких-то) силы.

Если оси координат в задаче используются только для проектирования векторов (векторных равенств), а не для определения координат, то начало координат, точку O, положение плоскости Q можно не указывать; а система координат для каждого тела (если их несколько) может быть выбрана своя; также в таких задачах нет надобности говорить о начальном моменте времени.

Методические указания к решению физических задач на тему: «**Динамика системы материальных точек и абсолютно твердого тела**»

По этой теме обычно предлагаются задачи, для решения которых используются законы сохранения импульса и момента импульса и теорема о движении центра масс системы материальных точек (тел), как часть решения кинематической или динамической задачи. Поэтому в физическом смысле задачи на первый план выносится рассмотрение взаимодействия тел (материальных точек), с тем чтобы какие-то тела объединить в систему, разделив тем самым силы на внешние и внутренние, а уже потом – движение тел системы. Существенной частью физического смысла задачи является определение замкнутости (полной или частичной) системы тел; если в системе тел нет ни одного тела, которое вращается или приходит во вращательное движение, то выясняют, чему равна сумма (векторная или в проекции на ось координат) внешних сил; если в системе тел имеет место вращательное движение, то выясняют равенство нулю суммы (векторной или в проекции на ось координат) момента внешних сил. При рассмотрении упомянутых сумм сил (моментов сил) важно не путать внешние силы с внутренними.

Главными элементами чертежа задачи по этой теме являются изображения скоростей (линейных, угловых) тел системы с указанием системы отсчета для каждой скорости; на чертеже изображаются тела (материальные точки) системы и ось (оси) координат, используемые для выяснения замкнутости системы тел и проектирования законов сохранения импульса (момента импульса).

Методические указания к решению физических задач на тему: «**Механическая энергия, механическая работа, механическая мощность**»

В задачах, в решении которых используются понятия и формулы механической энергии, механической работы, механической мощности, при раскрытии физического смысла приходится говорить в той или иной мере о механическом движении, о механическом взаимодействии, а при применении закона сохранения и превращения механической энергии – объединять взаимодействующие тела в систему, раскрывая при этом природу внутренних сил с тем, чтобы можно было говорить не только о замкнутости (незамкнутости) системы тел, но ещё о её консервативности (неконсервативности).

При выполнении чертежа задач этой темы, исходя из текста задачи и её физического смысла, надо использовать рекомендации к чертежам задач предыдущих тем; дополнением, иногда, является изображение уровня нулевой потенциальной энергии в однородном поле тяготения Земли.

Методические указания к решению физических задач на тему: «**Механика жидкостей и газов**»

Решение задач на равновесие и движение жидкости (газа) рассматривается, как правило, в инерциальной системе отсчета, так как все законы темы и формулы выводятся в предположении, что и при равновесии жидкости, и при её движении, и при движении тел в жидкости (газе) силы инерции не учитываются. Физический смысл задачи данной темы раскрывается с учетом сделанных выше указаний; при движении жидкости и тел в ней называется, какой является жидкость (идеальной, реальной) и каким является течение жидкости (ламинарным, турбулентным), если учитывается её вязкость.

Чертеж задачи должен соответствовать всем требованиям, высказанным в пособии в предыдущих темах и, кроме того, содержать изображение потока жидкости (газа), рассматриваемого в задаче (его размер, форма, линии тока, трубки тока, какие-то точки линии тока и сечения трубки тока).

Методические указания к решению физических задач на тему: «**Механические колебания, механические волны, звук**»

Как и в предыдущем пункте, здесь тоже надо применять рекомендации, данные в предыдущих пунктах пособия и при раскрытии физического смысла задачи и при выполнении чертежа, но с учетом

специфики колебательного и волнового движения (повторяемость движения во времени и в пространстве) и двойной природы звука.

Глава 2. КИНЕМАТИКА

2.1. Система отсчета

Определение. *Кинематика* является разделом механики, который изучает движение тел в пространстве без учета взаимодействий между ними (описывает движение, но не рассматривает причины его возникновения и изменения).

Механическое движение есть изменение положения тела относительно других тел, которые считаются условно неподвижными. Тела, относительно которых рассматривается движение других тел, называются *телами отсчета*. Однако, в механике обычно пользуются не телами отсчета, а *системами отсчета*.

Определение. Системой отсчета называют тело отсчета вместе со связанной с ним системой координат.

Если выбрана декартова система координат, то положение точки в пространстве определяется тремя координатами. Положение точки может быть определено и одной величиной – радиус-вектором.

Мы будем в дальнейшем пользоваться как координатным способом задания положения точки, как и векторным. Не нужно думать, что в практике пользуются лишь системой отсчета, связанной с Землей. Наоборот, чаще всего мы систему отсчета связываем с телами, движущимися относительно Земли. Так, например, шофер не рассматривает движение своего автомобиля, других автомобилей и пешеходов относительно Земли – он рассматривает их движение относительно себя или своего автомобиля. Бегун во время соревнований рассматривает движение своих соперников тоже относительно себя, а не относительно Земли, так как его интересует как они движутся именно относительно него (обгоняют, остаются и как быстро они это делают).

Умение правильно выбирать систему отсчета позволяет значительно упростить решение ряда задач. В качестве примера рассмотрим одну из них. Допустим, лодочник, движущийся против течения реки, в какой-то момент времени потерял кормовое весло. Через 1 час он это заметил, повернул лодку и поехал догонять уплывшее весло. Через сколько времени гребец догонит весло, если он будет прилагать

к веслам такие же усилия и число гребков в минуту останется прежним?

В этой системе отсчета, связанной с Землей, решить довольно сложно, так как в ней лодка, вода и весло находятся в движении. Однако, она решается очень просто, если систему отсчета связать с водой реки. Тогда упавшее кормовое весло в этой системе отсчета будет покоиться. Усилия гребца будут перемещать лодку относительно воды в любых направлениях одинаково, а поэтому, если он удалялся от весла 1 час, то и приближаться к нему он будет тоже 1 час.

Таким образом, выбор системы отчета в кинематике определяется в основном характером поставленной перед нами задачи, так как в кинематике все системы отсчета равноправны.

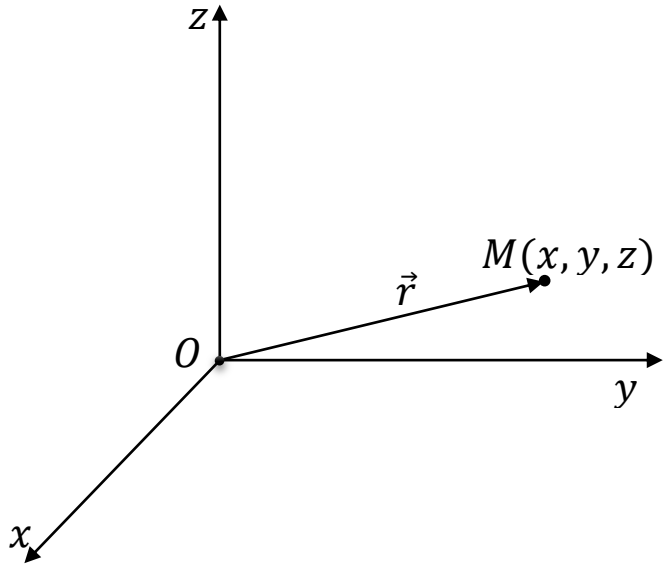


Рис. 2.1

Однако, в дальнейшем при изучении динамики мы увидим, что с динамической точки зрения это равноправие далеко не всегда выполняется.

Определение. Линия, описываемая данной точкой при ее движении в пространстве в определенной системе отсчета, называется *траекторией*.

Понятие траектории имеет смысл только в том случае, если указана система отсчета. Траектория «вообще» вне какой-либо системы отсчета бессмысленны. Дело в том, что одно и то же движение в разных системах отсчета будет происходить по совершено различным траекториям. Например, движение отпущенного тела в равномерно и

прямолинейно движущемся относительно Земли вагоне происходит в системе отсчета, связанной с вагоном, по прямолинейной вертикальной траектории; то же движение в системе отсчета, связанной с Землей, происходит по параболической траектории. По виду траектории движение может быть прямолинейным (траектория точки прямая линия) и криволинейном (траектория точки кривая линия).

2.2. Перемещение и скорость

Все физические величины делятся на *скаляры* и *векторы*. *Векторные величины* характеризуются кроме числа еще направлением в пространстве (сила, скорость, ускорение и т.п.). *Скалярные* же величины характеризуются только числовым значением, которое может быть как положительным, так и отрицательным, и не имеют направления в пространстве (температура, масса, работа, энергия и т.п.). Векторные величины складываются геометрически (по правилу параллелограмма), а скалярные – алгебраически.

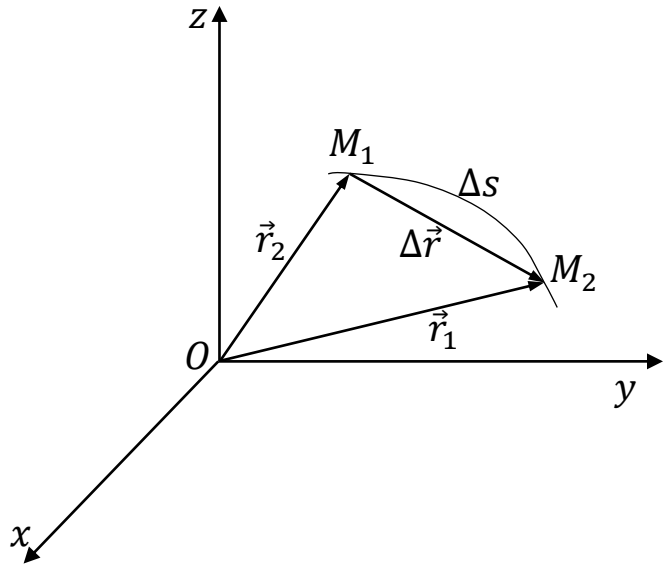


Рис. 2.2

Пусть в начальный момент времени движущаяся точка была в положении M_1 (рис. 2.2), и за промежуток времени t переместилась в положение M_2, двигаясь по произвольной криволинейной траектории.

Первоначальное положение точки можно полностью охарактеризовать радиусом-вектором r_1, а конечное ее положение – радиусом-вектором r_2.

Определение. *Радиус-вектор* – вектор, проведенный в данную точку из начала отсчета O. Характеризует положение материальной точки в пространстве.

Вектор, проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени, называется *вектором перемещения* ($\Delta\vec{r}$). Дуга же M_1M_2 является *путем*, который прошла точка. Путь является скалярной величиной.

На первый взгляд кажется, что для случая прямолинейного движения перемещения и путь для конечных промежутков времени совпадают.

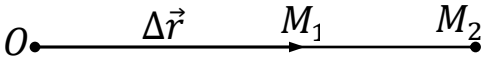


Рис. 2.3

Однако это будет выполняться только для однонаправленного непериодического движения. Так, например, если в начальный момент времени движущаяся точка занимала положение O (рис. 2.3), а через некоторый промежуток времени дошла, до M_2 и вернулась в положение M_1, то модуль вектора перемещения $\Delta r = OM_1$ не равен пройденному точкой пути ($OM_2 + M_2M_1$). Если же движение однонаправленно, то очевидно, что численное значение вектора перемещения будет равно пройденному пути ($\Delta r = \Delta s$).

В общем случае (рис. 2.2) $\Delta r \neq \Delta s$, но $lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta r} = \frac{ds}{dr} = 1$, т.е. $dr = ds$.

Закон независимости движений. Если точка совершает одновременно два перемещения, то ее конечное положение не зависит от того, совершались ли оба перемещения одновременно или в какой угодно последовательности одно за другим.

Правило параллелограмма для сложения движений основано на этом законе.

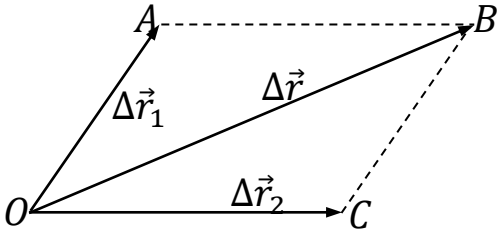


Рис. 2.4

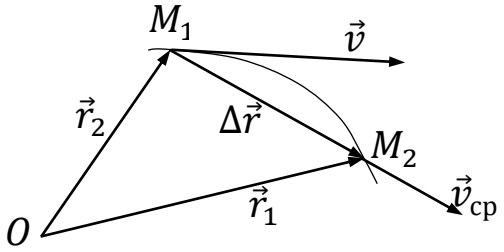


Рис. 2.5

Действительно, получить результирующее перемещение $\overrightarrow{\Delta r_1}$ (рис. 2.4), а затем перемещение $\overrightarrow{\Delta r_2}$ (*AB*). К тому же результату мы придем, считая, что точка вначале совершила перемещение $\overrightarrow{\Delta r_2}$, а затем $\overrightarrow{\Delta r_1}$ (*CB*). Участвуя же одновременно в двух перемещениях, точка будет перемещаться по *OB* и в конце перемещения тоже придет в положение *B*.

Для характеристики движения введем векторную физическую величину скорость, определяющую как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.

<u>Определение.</u> *Средней скоростью* за промежуток времени Δt называют вектор $\overrightarrow{v_{ср}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\overrightarrow{\Delta t}}$.

Вектор средней скорости совпадает по направлению с вектором перемещения (рис. 2.5).

При $\Delta t \to 0$ мы получим вектор *истинной* или *мгновенной скорости* (скорость в данный момент времени): $\vec{v} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

При $\Delta t \to 0$, $M_2 \to M_1$, а следовательно, в пределе вектор скорости будет направлен по касательной к траектории. Очевидно, что направление первой производной от радиуса-вектора по времени (т.е. скорость) в общем случае не совпадает с направлением самого радиуса-вектора.

Можно написать, что $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$. Численно $\frac{dr}{ds} = 1$, поэтому $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$, где $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной.

Тогда $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}$. Численное значение мгновенной скорости $v = \frac{ds}{dt}$.

Вектор скорости можно спроецировать на оси координат. Тогда проекция скорости будут равны:

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Если при движении точки направление ее скорости неизменно, то движение будет прямолинейным. Если направление скорости изменяется, то движение будет криволинейным. Если величина скорости неизменна, то движение будет равномерным. Если величина скорости изменяется, то движение будет переменным.

2.3. Ускорение

Допустим, что материальная точка движется по произвольной траектории. Пусть в начальный момент времени она занимает положение M_1 и имеет скорость $\vec{v}$, а через промежуток времени Δt она пришла в положение M_2 и имеет скорость $\vec{v}_1$ (рис. 2.6).

Таким образом, у движущейся точки изменяется как величина, так и направление скорости.

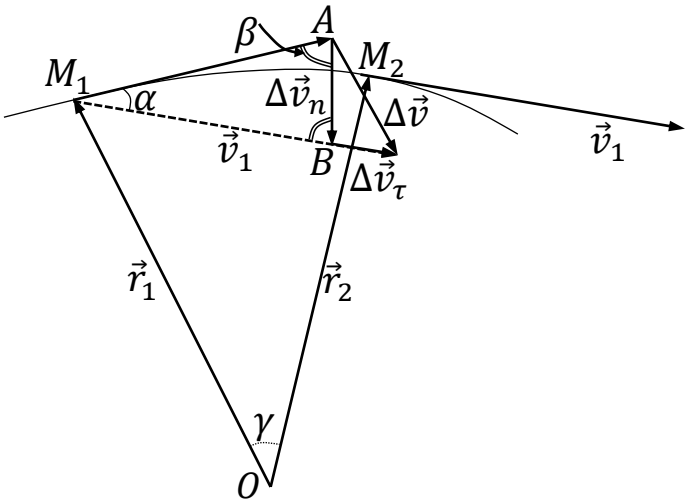


Рис. 2.6

Найдем изменение скорости за промежуток времени Δt. Для этого мы перенесем вектор $\vec{v}_1$, параллельно в точку M_1. Очевидно, что искомое изменение скорости выразится вектором $\Delta\vec{v}$.

<u>Определение.</u> *Средним ускорением* движущейся точки за промежуток времени Δt называется вектор $\vec{a}_{cp=}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$.

Мгновенным или *истинным ускорением* называют вектор $\vec{a} = lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt}$. Ускорение может быть выражено и через радиус-вектор: $\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{d^2r}}{dt^2}$.

Проекции вектора ускорения на оси координат будут:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2},\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Очевидно, что направление осей координат может быть взято произвольно и независимо от траектории движения рассматриваемой точки. Направление осей координат с течением времени неизменно. Однако можно разложить ускорение по осям, направление которых

будет зависеть от траектории ее движения. Для этого на векторе $\vec{v}_1$, от точки M_1 отложим вектор $\vec{v}$ и конец вектора соединим с полученной точкой B. Отрезок АВ обозначим через $\Delta\vec{v}_n$ Разность $\vec{v}_1$ - $\vec{v}$, совпадающую по направлению с $\vec{v}_1$ обозначим $\Delta\vec{v}_t$. Изменение скорости $\Delta\vec{v}$ можно разбить на две части: на вектор $\Delta\vec{v}_t$, который характеризует изменение скорости по величине, и на вектор $\Delta\vec{v}_n$, который характеризует изменение скорости по направлению. Изменение скорости можно представить как $\overrightarrow{\Delta v} = \overrightarrow{\Delta v_n} + \overrightarrow{\Delta v_t}$, $\vec{a} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v_n}}{\Delta t} + lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v_t}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{v_n}}{dt} + \frac{\overrightarrow{dv_t}}{dt} = \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{a_t}$.

Так как $\Delta\vec{v}_t$ направлено по вектору скорости, а скорость в любой точке траектории направлена по касательной с ней, то вектор $\Delta\vec{a}_t$ направлен по касательной и называется *тангенциальным* ускорением.

Численно $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$. В векторной форме $\overrightarrow{a_t} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau}$.

Получим формулы скорости и пути для равноускоренного прямолинейного движения (т.е. $a_t = const$).

Из формулы для тангенциального ускорения следует: $dv = adt$. Чтобы найти скорость, проинтегрируем обе части равенства. Скорость будем интегрировать в пределах от начальной скорости $\vec{v}_0$ до значения скорости v в данный момент времени t. Время будем интегрировать в пределах от начального момента времени, который мы примем за 0, до данного момента времени t. В этом случае момент времени t будет совпадать с промежутком времени движения точки:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\overline{dt}\,, v - v_0 = at, v = v_0 + at.$$

Найдем путь, пройденный точкой за промежуток времени t. Для этого в формуле $\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\overline{dt}\,, v - v_0 = at, v = v_0 + at$ заменим переменную величину $v = \frac{ds}{dt}$ (начальная скорость v_0 и ускорение a есть величины постоянные) : $\frac{ds}{dt} = v_0 + at$ или $ds = v_0 dt + atdt$.

Интегрируя, получим: $\int_0^s ds = \int_0^t v_0\, dt + \int_0^t atdt\,, s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

Если из формулы $\frac{ds}{dt} = v_0 + at$ или $ds = v_0 dt + atdt$ найти промежуток времени t и подставить полученное значение в формулу $\int_0^s ds = \int_0^t v_0\, dt + \int_0^t atdt\,, s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, то $v^2 - v_0^2 = 2as$.

Вернемся к рис. 6: проведем радиусы кривизны r_1 и r_2 в точках M_1 и M_2. В общем случае $r_1 \neq r_2$, но при $\Delta r \to 0$ $r_2 \to r_1$, а в пределе $r_1 = r_2$. Тогда $\Delta OM_1 M_2$ будет равнобедренным, а траектория окажется частью окружности радиуса $R = r_1 = r_2$. При этом $\alpha = \gamma$, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами (радиус окружности перпендикулярен к касательной, по которой направлена скорость).

Треугольник M_1AB равнобедренный. Угол $\beta = \frac{\pi-\alpha}{2}$. При $\Delta r \to 0$ угол $\alpha \to 0$, а угол $\beta \to \frac{\pi}{2}$. В пределе вектор $\overrightarrow{\Delta v_n}$ будет перпендикулярен к скорости $\vec{v}$, т. е. направлен по радиусу к центру, а поэтому a_n называется *нормальным* (иногда – центростремительным) ускорением.

Равнобедренные треугольники $\Delta OM_1 M_2$ и, M_1AB имеющие равные углы при вершинах, подобны. Из их подобия следует:

$$\frac{\Delta v_n}{v} = \frac{\Delta r}{R}, \Delta v_n = \frac{v\Delta r}{R}.$$

Нормальное ускорение $a_n = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v}{R} lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$, ($v$ и R, как постоянные величины, могут быть вынесены за знак предела).

В векторной форме нормальное ускорение $\overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{R}\vec{n}$, где $\vec{n}$– единичный вектор нормали.

Таким образом, вектор ускорения может быть разложен на составляющие (или спроектирован) как по осям координат, произвольно направленным в пространстве и неизменным с течением времени, так и по осям, связанным с движущейся точкой. Эти оси называются естественными. Их направления определяются единичными векторами касательной $\vec{\tau}$, нормали $\vec{n}$ и бинормали $\vec{b}$. Единичный вектор $\vec{b}$ направляется так, чтобы векторы $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ образовывали правую систему. Поскольку вектор ускорения лежит в плоскости векторов $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$, то составляющая ускорения (или проекция) по бинормали равна нулю.

Совершенно очевидно, что направление естественных осей в пространстве для различных точек траектории будет различным.

Полное ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}.$$

Так как составляющие ускорения взаимно перпендикулярны, то его модуль:

$$a = \sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}.$$

2.4. Поступательное движение твердого тела

До сих пор мы рассматривали движение материальной точки. Теперь перейдем к изучению движения твердого тела. Существует два основных вида движения тела: поступательное и вращательное.

Определение. *Поступательным* называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в теле и неизменно с ним связанная, перемещается параллельно самой себе.

Следует обратить внимание, что в формулировке определения поступательного движения речь идет о перемещении любой прямой, связанной с телом.

Так, если соединить спицей две точки глобуса, имеющие одинаковую широту, одна из которых будет северной, а другая южной, то эта спица при вращении глобуса будет перемещаться параллельно самой себе. Однако, это вовсе не означает, что глобус движется поступательно: если спицу поместить иначе, то параллельного ее перемещения не будет.

Поступательное движение не обязательно является прямолинейным. Так, например, точки карандаша (рис. 2.7) движутся криволинейно, в то время как карандаш движется поступательно.

Докажем, что при поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и в каждый данный момент времени имеют разные скорости и ускорения.

Пусть мы имеет твердое тело, движущееся поступательно в пространстве. Отметим в нем две точки A и B, через которые проведем прямую (рис. 2.8). При движении тела эта прямая будет последовательно занимать положение A_1B_1, A_2B_2 и т.д. Положение точки A можно охарактеризовать радиусом – вектором r_A, а положение точки B – r_B.

Очевидно, что $r_A = r_B + BA$.

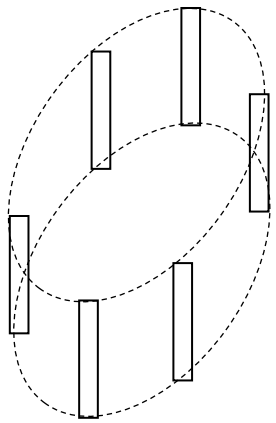


Рис. 2.7

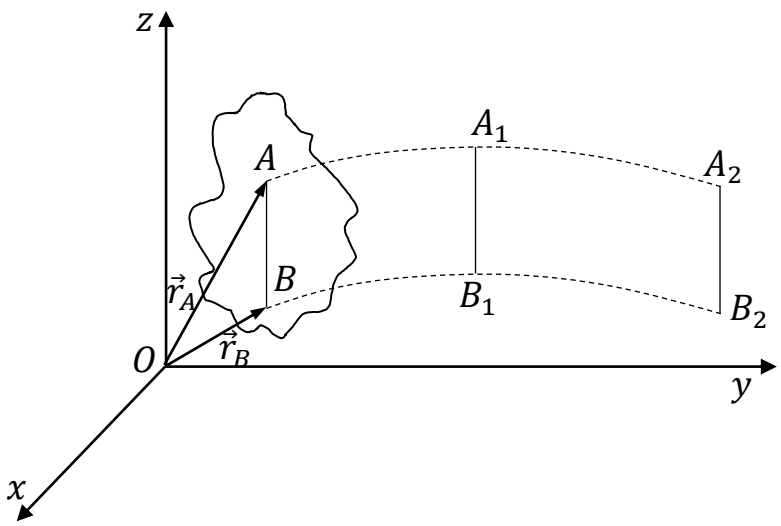


Рис. 2.8

Продифференцировав по времени полученное равенство, мы найдем скорости движения точек *A* и *B*. Вектор *BA* при дифференцировании дает нуль, т.к. он перемещается параллельно, т.е. является постоянной величиной: $v_A = v_B$.

Продифференцировав полученное равенство по времени, получим: $a_A = a_B$.

Так как в твердом теле расстояния между точками остаются неизменными, то различные положения точки *B* в пространстве мы можем получить, смещаясь от точки *A* на вектор *AB*. В связи с этим траектории точек *A* и *B* при наложении совпадут, т.е. будут одинаковыми.

Поскольку все рассуждения проводились относительно произвольно выбранных точек, то они окажутся справедливыми для любых точек твердого тела.

2.5. Вращательное движение твердого тела. Угловая скорость и угловое ускорение

Определение. *Вращательным* называется такое движение твердого тела, при котором все его точки двигаясь в параллельных плоскостях, описывают концентрические окружности с центрами, лежащими на одной неподвижной прямой, называемой осью вращения.

На рис. 2.9 изображено твердое тело, которое вращается вокруг оси *O*, расположенной перпендикулярно чертежу. Выделим в твердом

теле одну точку, которая в начальный момент времени занимает положение M_1. За промежуток времени Δt все тело повернется на некоторый угол $\Delta\varphi$ и рассматриваемая нами точка придет в положение M_2.

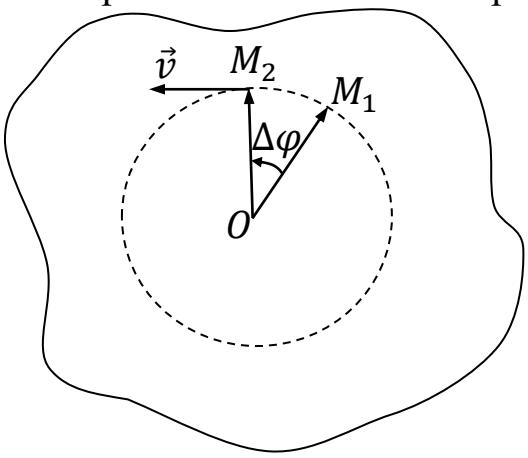


Рис. 2.9

Под *средней угловой скоростью* понимается величина $\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

Мгновенное или *истинное значение* угловой скорости $\omega = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$.

Очевидно, что угловая скорость всех частей твердого тела одинакова и является характеристикой его вращательного движения. Отдельно взятые точки угловой скорости не имеют: если точка движется по окружности, то угловой скоростью обладает подвижный радиус-вектор (т.е. протяженное тело), а не точка: сама по себе точка вращаться не может. Это положение нашло себе отражение в терминологии: говорят, что тело вращается вокруг оси, а точка обращается по окружности вокруг определенного центра.

Однако можно связать характеристики движения отдельно взятой точки твердого тела (линейные скорости и ускорение) с характеристиками движения твердого тела (угловыми скоростью и ускорением).

Путь, проходимый точкой M за бесконечно малый промежуток времени dt, будет равен $ds = rd\varphi$.

Тогда скорость точки твердого тела $v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} = \omega r$. Линейная скорость различных точек вращающегося твердого тела будет различной: она зависит от радиуса.

Периодом вращения называется промежуток времени, за который подвижный радиус-вектор повернется на угол 2π. Таким образом,

если $\varphi = 2\pi$, то $t = T$ (T – период вращения). Тогда $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Период и число оборотов в единицу времени величины взаимно обратные: $T = \frac{l}{n}$, $\omega = 2\pi n$.

Если угловая скорость постоянна, то $\varphi = \omega t$.

Если же угловая скорость переменна, то быстрота ее изменения характеризуется угловым ускорением.

Под *средним угловым ускорением* за промежуток времени t понимают величину $\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$, где $\Delta\omega$ – изменение угловой скорости за промежуток времени Δt.

Мгновенное или *истинное значение углового ускорения* $\varepsilon = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$.

Рассмотрим случай равнопеременного вращения ($\varepsilon = const$), тогда $d\omega = \varepsilon dt$.

Проинтегрируем это равенство: $\int_{\omega 0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt$, $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$.

В полученном равенстве угловая скорость ω есть величина переменная, зависящая от времени, а ω_0 и ε – постоянны.

Тогда $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t$. После интегрирования получим: $\Phi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$.

Видно, что полученные нами формулы внешне напоминают формулы скорости и пути для движущейся точки: роль пути при вращении играет угол поворота тела, роль скорости – угловая скорость, роль ускорение – угловое ускорение.

Выразим нормальное и тангенциальное ускорения отдельных точек вращающегося твердого тела через его угловую скорость и угловое ускорение:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R,\ a_t = \frac{d\upsilon}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon r.$$

Угловая скорость есть векторная величина. Вектор угловой скорости должен характеризовать:

1) величину угловой скорости;

2) направление вращения;

3) расположение оси в пространстве.

Условились вектор угловой скорости располагать перпендикулярно плоскости вращения (т.е. вдоль или параллельно оси), так, что-

бы, смотря с его конца, видеть тело вращающимся против хода часовой стрелки, длина изображаемого вектора должна соответствовать величине угловой скорости (рис. 2.10).

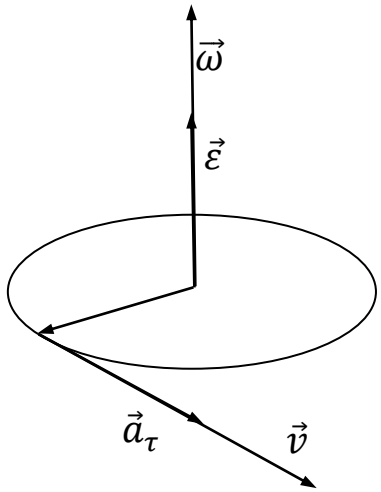


Рис. 2.10

Пользуясь правилом буравчика, можно заметить, что $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Аналогично можно ввести и вектор углового ускорения. В случае ускоренного вращения вектор тангенциального ускорения будет совпадать по направлению с вектором скорости (рис. 2.10), а вектор углового ускорения с вектором угловой скорости. Применяя правило буравчика, получим: $\overrightarrow{a_t} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$. Если же вращение будет замедленным, то вектор тангенциального ускорения будет направлен противоположно вектору скорости, но и вектор углового ускорения будет противоположен вектору угловой скорости. В связи с этим вектор тангенциального ускорения выразится тем же векторным произведением.

2.6. Сложное движение. Теорема сложения скоростей

В механике часто возникает следующая задача: положение материальной точки в определенный момент времени, ее скорость и ускорение определены относительно системы отсчета, которая в свою очередь движется относительно другой системы отсчета. Требуется определить положение точки, ее скорость и ускорение относительно второй системы отсчета. Например, положение человека относительно движущегося вагона, а также его скорость и ускорение, известны;

нужно определить его положение в тот же момент времени, скорость и ускорение относительно Земли.

Ограничимся рассмотрением простейшего случая: одна система отсчета движется относительно другой равномерно и прямолинейно. Пусть система отсчета $x'O'y'z'$ движется равномерно и прямолинейно относительно системы отсчета $xOyz$ вдоль оси x со скоростью v_0 (рис. 2.11). Тогда в момент времени t для материальной точки M можно написать:

$$y = y', z = z', x = x' + x_0,$$

где x_0 – координата точки O'. Очевидно, что $x_0 = v_0t$ (так как в начальный момент времени системы отсчета совпадали, то момент времени равен промежутку времени, в течение которого двигалась штрихованная система отсчета).

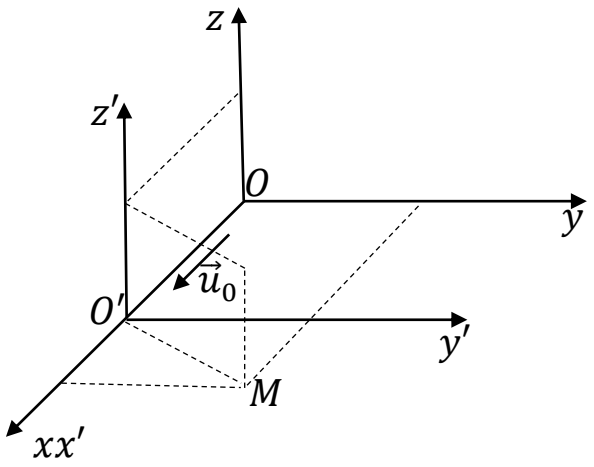


Рис. 2.11

Следовательно, $x = x' + v_0t$, $y = y'$, $z = z'$; $t = t'$, t и t' – время, отсчитываемое соответственно по часам, покоящимся в системах отсчета O и O'. Полученные равенства называются *преобразованиями координат Галилея*.

Продифференцировав преобразования координат Галилея по времени, получим:

$$v_x = v_x' + v_0, v_y = v_y', v_z = v_z'.$$

Эти три выражения можно получить при проекции на оси координат следующего векторного равенства: $\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v_0}$.

Движение, рассматриваемое относительно условно неподвижной системы отсчета, называется *абсолютным* движением, а скорость этого движения – *абсолютной* ($\vec{v}$). Движение, рассматриваемое отно-

сительно движущейся системы, называется относительным движением, а скорость этого движения – *относительной* ($\overrightarrow{v'}$).

Движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной, называется переносным движением, а скорость этого движения *переносной* ($\overrightarrow{v_0}$).

Полученная нами теорема сложения скоростей гласит: абсолютная скорость движущейся точки равна геометрической сумме относительной и переносной ее скоростей.

Так как в нашем случае переносная скорость постоянна, то при повторном дифференцировании преобразований координат Галилея, мы получим: $\vec{a} = \overrightarrow{a'}$, т.е. ускорения движущейся точки в системах отсчета, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, одинаковы.

2.7. Задачи

Методические указания (более подробно в п. 1.7): Во всех кинематических задачах рассматривается одно физическое явление – механическое движение (а оно относительно) какого-то (каких-то) материальных объектов. Поэтому в физическом смысле задачи в первую очередь выбирается система отсчета с указанием (при поступательном движении) тела отсчета, системы координат (декартовой, естественной или обеих), числа осей, их положения и направления; указывается положение начала координат на теле отсчета, выбирается начальный момент времени. При вращательном движении абсолютно твердого тела в качестве тела отсчета берется неподвижная плоскость Q, в которой находится ось вращения тела; координатой, определяющей положение тела в любой момент времени, является двугранный угол между двумя плоскостями Q и P, пересекающимися по оси вращения тела (плоскость P связана с вращающимся телом). За начальный момент времени обычно берется момент совпадения указанных плоскостей.

Затем называется вид движения тела. При поступательном движении тело либо заменяется материальной точкой, либо выбирается какая-то точка тела, движение которой затем и рассматривается в решении задачи. При вращательном движении тело материальной точ-

кой заменять нельзя, но, иногда, кроме вращения тела рассматривается ещё движение какой-то точки тела.

Вид движения тела (материальной или геометрической точки тела) указывается для того, чтобы в систему уравнений включать те формулы, которые справедливы для указанного движения материального объекта. При этом одни и те же кинематические законы (формулы) в одной и той же задаче могут использоваться не один раз в зависимости от промежутка времени движения (при этом, целесообразно, эти промежутки времени измерять от одного и того же начального момента времени).

В случае сложного движения абсолютно твердого тела, например, при его качении, надо указать, каким образом лучше рассматривать это движение: или как вращение вокруг мгновенной оси, или как сумму двух движений (одно из них – поступательное движение со скоростью центра масс, другое – вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр масс тела).

В задачах, в которых идет речь о движении нескольких тел (материальных точек) система отсчета берется одна.

В некоторых задачах движение одного тела рассматривается в нескольких (чаще всего в двух) системах отсчета; в этом случае надо ещё называть вид движения одной системы отсчета относительно другой (других) системы отсчета.

На чертеже кинематической задачи, рассматривающей движение материальной точки, изображается тело отсчета. Оси (декартовые, естественные) координат (их начало, положение, направление и название), векторы начальной скорости и ускорения материальной точки, траектория движения и какие-то точки на ней, а также другие элементы, которые следуют из текста задачи и используются в её решении.

При вращательном и сложном движении изображается движущееся тело и плоскости Q и P, иногда – угловой путь, угловая скорость (как правило, начальные), угловое ускорение и, в зависимости от характера подхода к рассмотрению сложного движения тела, - линейные кинематические величины.

При одновременном движении тела (материальной точки) в нескольких системах отсчета изображаются линейные (угловые) кине-

матические характеристики движения одной системы отсчета относительно другой (других) системы отсчета.

Чертеж желательно выполнять не шаблонно, формально, следуя каким-то наставлениям, а творчески, так, чтобы он дополнял физический смысл задачи и служил составлению системы уравнений, которая и дает ответы на поставленные в задаче вопросы.

2.7.1. Примеры решения задач

2.1. Наблюдатель, стоявший в момент начала движения поезда у его переднего края, заметил, что первый вагон прошел мимо него за 4 с. Сколько времени будет двигаться мимо него *n*-й (7-й) вагон? Движение поезда считать равноускоренным.

СИ

$t = 4c$

$n = 7$

$t_n' - ?$

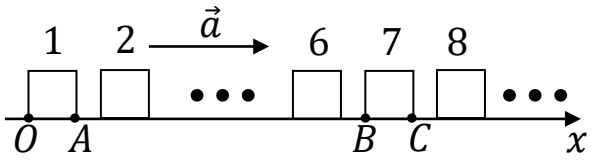


Рис. 2.12

Исходя из относительности механического движения, в задаче лучше рассматривать движение не поезда относительно наблюдателя, а наблюдателя относительно поезда. Итак, в системе отсчета, связанной с поездом, рассматривается движение наблюдателя – материальной точки прямолинейное с постоянным ускорением. За начало отсчета времени примем момент начала движения наблюдателя.

На рис. 2.12 изображено: прямоугольниками тело отсчета – поезд, точка *O* – начало координат, выбранное у переднего края поезда, то есть в том месте, откуда начал движение наблюдатель, *OX* – ось координат, направленная по траектории движения наблюдателя горизонтально вправо, точка *A* – положение наблюдателя через 4 с движения, точка *B* – положение наблюдателя в момент прохождения им переднего края *n*-го (7-го) вагона, точка *C* – положение наблюдателя в момент прохождения им заднего края *n*-го вагона; цифры 1,2,…,6,7,8,… обозначены номера вагонов, $\vec{a}$ – ускорение наблюдателя, равнонаправленное с вектором мгновенной скорости наблюдателя.

$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$ *(1)*

$x_n = x_0 + v_{0x}t_n + \frac{a_x t_n^2}{2}$ *(3)*

$x = l, x_0 = 0, v_{0x} = 0, a_x = a$ $\qquad$ $x_n = nl$

$x_{n-1} = x_0 + v_{0x}t_{n-1} + \frac{a_x t_{n-1}^2}{2}$ (2) $\qquad$ $t_n{}' = t_n - t_{n-1}$

$x_{n-1} = (n-1)l$

В системе уравнений кинематические уравнения (1), (2), (3) выражают закон изменения координаты материальной точки, движущейся с постоянным ускорением, в них t, t_{n-1}, t_n – время движения наблюдателя до точек A, B, C соответственно, x, x_{n-1}, x_n – их координаты, выраженные через длину l одного вагоне, x_0 – начальная координата наблюдателя, v_{0x} – проекция начальной скорости наблюдателя на ось OX, равная нулю, так как наблюдатель начинает движение из состояния покоя, a_x – проекция на ось OX, равная модулю вектора ускорения с положительным знаком.

$t' = t\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$ $\qquad$ $t_n' = 4\ \ c\left(\sqrt{7} - \sqrt{6}\right) = 0,8\ \ c$

2.2. Каковы направление движения и радиус кривизны траектории стрелы, выпущенной из лука с башни высотой 25 м под углом 60^0 к горизонту со скоростью 30 м/с через 1,5 с после начала её полета? Определить максимальные дальность и высоту полета стрелы. Сопротивлением воздуха пренебречь.

СИ

$h = 25$м

$\alpha = 60°$

$v_0 = 30\,\frac{м}{c}$

$t_1 = 1{,}5$ с

$\beta - ?$

$R - ?$

$l - ?$

$H - ?$

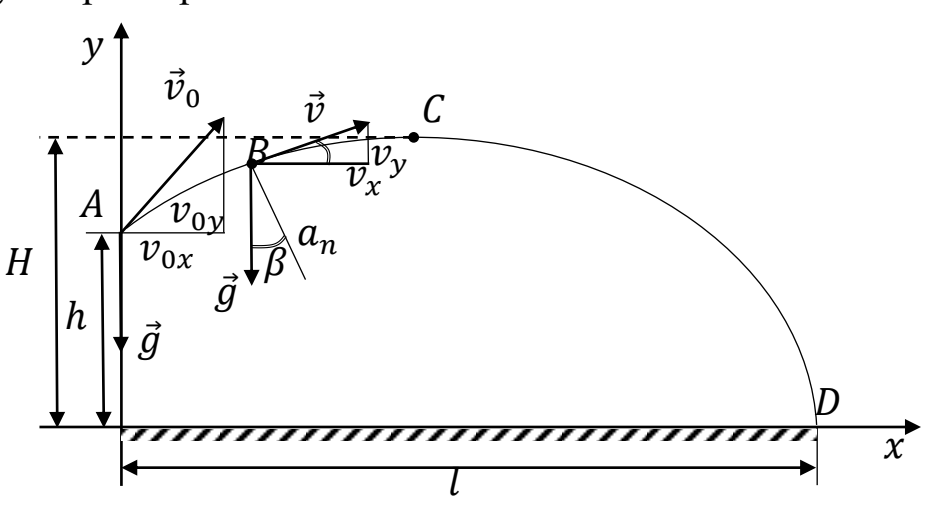


Рис. 2.13

В системе отсчета, связанной с Землей, рассматривается движение стрелы – материальной точки криволинейное с постоянным уско-

рением $\vec{g}$ (ускорением свободного падения). За начальный момент времени примем момент начала движения стрелы.

На рис. 2.13 изображено: штриховкой тело отсчета – Земля, точка *O* – начало координат, взятое на поверхности земли под начальным положением стрелы (точка *A*, находящаяся на высоте h от поверхности земли), *OX* – ось координат, расположенная горизонтально и направленная вправо, *OУ* – ось координат, направленная вертикально вверх, траектория движения стрелы (парабола с точками *B* – это положение стрелы через 1,5 с полета, *C* – положение стрелы на максимальной высоте *H*, *Д* – положение стрелы в конце её полета, находящаяся на расстоянии *l* по горизонтали от места пуска стрелы), векторы $\vec{v}_0$, $\vec{v}$ – начальной скорости стрелы и её скорости через 1,5 с полета, v_{0x}, v_{0y}, v_x, v_y - их проекции на оси координат *OX* и *OУ*, a_n – проекция $\vec{g}$ на естественную ось координат по нормали к траектории в точке *B*, α, β – углы с горизонтом векторов $\vec{v}_0, \vec{v}$ (угол β дает направление полета стрелы через 1,5 с). При выполнении рис. 2.13 учитывается то, что проекции скорости стрелы на горизонтально расположенную ось координат в любой момент времени одинаковы.

$tg\beta = \frac{v_y}{v_x}$ (1)

$v_x = v_{ox} + a_x t_1$ (2)

$v_y = v_{oy} + a_y t_1$ (3)

$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $a_x = 0$

$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, $a_y = -g$

$a_n = \frac{v^2}{R}$ (4)

$a_n = g\cos\beta$

$v^2 = v_x^2 + v_y^2$ (9)

$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$ (5) $x=l$, $x_0=0$

$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}$ (6) $y=0$, $y_0=h$

$y_2 = y_0 + v_{0y}t_2 + \frac{a_y {t_2}^2}{2}$ (7), $y_2 = H$

$v_{2y} = v_{oy} + a_y t_2$ (8), $v_{2y} = 0$ (10)

В системе уравнений задачи кинематические уравнения (5), (6), (7) выражают закон изменения координаты, формулы (2), (3), (8) – законы изменения проекции скорости материальной точки, движущейся с постоянным ускорением, в них t_1 – время движения стрелы до точки *B*, *t* – время всего полета стрелы, t_2 – время подъема стрелы на максимальную высоту, a_x, a_y – проекции $\vec{g}$ на оси координат *OX*, *OУ*, формула (9) написана по теореме Пифагора, формула (1) и другие без номеров следуют из чертежа. Формула (10) отражает то, что в точке *C* вертикальная составляющая скорости обращается в ноль.

Примечание: В этой задаче и в некоторых последующих для нахождения векторных величины (её модуля и направления), составляющих векторных величин и их проекций на оси координат используются теоремы Пифагора, синусов, косинусов, тригонометрические функции, так как модули векторных величин (проекции векторных величин) изображаются длинами сторон каких-то треугольников.

$$\beta = arctg\frac{\upsilon_0 \sin\alpha - gt_1}{\upsilon_0 \cos\alpha}, \beta = arctg\frac{30\text{м/с}\cdot 0{,}87 - 9{,}8\ \text{м/с}^2\cdot 1{,}5\ \text{с}}{30\ \text{м/с}\cdot 0{,}50} = 36^0$$

$$R = \frac{\upsilon_0^2 \cos^2\alpha + \upsilon_0^2 \sin^2\alpha - 2\upsilon_0 g t_1 \sin\alpha + g^2 t_1^2}{g\cos\alpha}$$

$$R = \frac{(30\ м/с)^2\cdot 0{,}25 + (30\ м/с)^2\cdot 0{,}75 - 2\cdot 30\ м/с\cdot 9{,}8\ м/с^2\cdot 1{,}5\ с\cdot 0{,}87 + (9{,}8\ м/с^2)^2\cdot(1{,}5\ с)^2}{9{,}8\ м/с^2\cdot 0{,}78} = 95м$$

Совместное решение (5) и (6) дает значение l = 98 м.

$$H = h + \frac{(\upsilon_0 \sin\alpha)^2}{2g}, H = 25\ м + \frac{(30\ м/с)^2\cdot 0{,}75}{2\cdot 9{,}8 м/с^2} = 58\ м.$$

2.3. Колесо начинает вращаться с постоянным угловым ускорением 0,040 с$^{-2}$. Через какое время после начала вращения полное ускорение точки обода колеса будет направлено под углом 76^0 к вектору скорости этой точки? Какое число оборотов совершит колесо за этот промежуток времени?

СИ

$\varepsilon = 0{,}040 c^{-2}$

$\alpha = 76°$

$t - ?$

$n - ?$

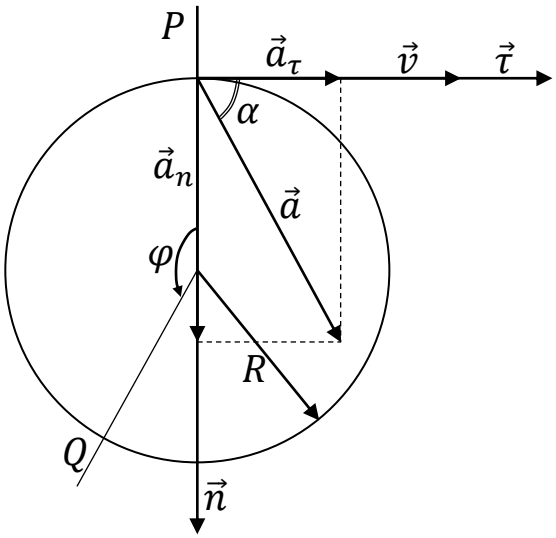


Рис. 2.14

В системе отсчета, связанной с неподвижной плоскостью Q, рассматривается равноускоренное вращение колеса, изображенного на чертеже окружностью радиуса R, вокруг неподвижной оси враще-

ния, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа, и равноускоренное движение точки А колеса по окружности, изображающей на чертеже колесо. За начальный момент времени выбираем момент времени, когда плоскость Q и плоскость P, связанная с колесом и пересекающаяся с плоскостью Q по оси вращения колеса, совпадают и колесо начинает вращение.

На рис. 2.14, помимо сказанного выше, изображено: угловой путь колеса φ, линейная скорость $\vec{v}$ точки A колеса, ее полное ускорение $\vec{a}$, нормальное ускорение $\vec{a}_n$, тангенциальное ускорение $\vec{a}_n$ точки A колеса в момент времени t, угол α между векторами $\vec{v}$ и $\vec{a}$, естественные оси координат n – по нормали, τ – по касательной к траектории точки обода колеса в точке A траектории.

$tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}$ (1), $a_\tau = \varepsilon R$ (4),

$a_n = \omega^2 R$ (2), $\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$ (5),

$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ (3), $\varphi = 2\pi n$, $\varphi_0 = 0$.

$\omega_0 = 0$,

В системе уравнений формула (1) следует из условия задачи и чертежа, в ней a_n, a_τ – модули векторов $\vec{a}_n$, $\vec{a}_\tau$, формула (2) дает связь модуля угловой скорости вращения колеса с модулем нормального ускорения его точки, находящейся на расстоянии R от оси вращения, формула (3) выражает закон изменения угловой скорости колес со временем при равноускоренном вращении (в ней ω_0 – модуль начальной угловой скорости колеса, равный нулю в связи с выбранным выше начальным моментом времени), формула (4) связывает угловую кинематическую величину (модуль углового ускорения колеса ε) с линейной кинематической величиной a_τ точки А колеса, формула (5) выражает закон изменения со временем углового пути φ колеса при его равноускоренном вращении (в нем значение углового пути φ_0 в начальный момент времени, исходя из ранее сказанного, равно нулю, а угловой путь φ может быть выражен не только в радианах, но и через число оборотов n колеса, так как при одном обороте колесо поворачивается на угол в 2π рад).

$$t = \sqrt{\frac{tg\alpha}{\varepsilon}}, \quad t = \sqrt{\frac{4{,}011}{0{,}040 \quad c^{-2}}} = 10 \quad c$$

$$n = \frac{\varepsilon t^2}{4\pi}, \; n = \frac{0{,}040 \quad c^{-2} \cdot (10 \quad c)^2}{4 \cdot 3{,}14} = 0{,}32.$$

2.4. Шар радиусом 30 мм катится равномерно без скольжения по двум параллельным линейкам, расстояние между которыми равно 40 мм, и за 2,0 с проходит 120 см. С какими скоростями движутся верхняя и нижняя точки шара относительно линеек?

СГС

$r = 30\text{мм} = 3{,}0\text{см}$

$b = 40\text{мм} = 4{,}0\text{см}$

$t = 2{,}0c$

$l = 120\text{см}$

$v_B - ?$

$v_H - ?$

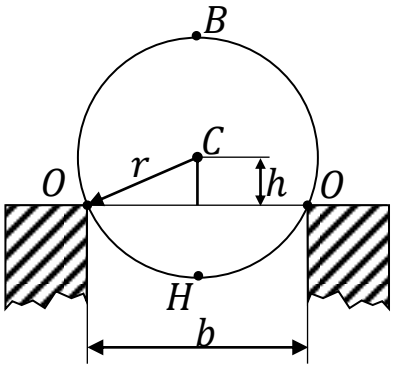


Рис. 2.15

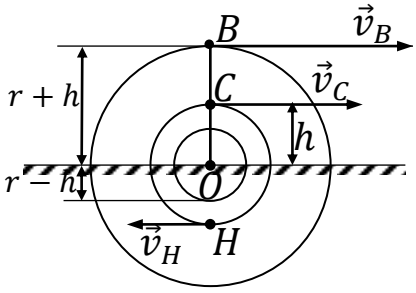


Рис. 2.16

Первый способ решения задачи: В системе отсчета, связанной с линейками рассматривается равномерное качение шара без скольжения, которое можно рассматривать как равномерное вращение шара вокруг мгновенной оси, проходящей через точки касания (точки *O*, *O*) поверхности шара с краями линеек; при этом точки шара: точка *B* (верхняя точка шара), точка *H* (нижняя точка шара), точка *C* (центр шара) будут равномерно двигаться, описывая окружности радиусами, равными *r*+*h*, *r*-*h*, *h*, соответственно.

На рис. 2.15 и рис. 2.16 изображено: шар окружностью радиусом *r*, спереди и сбоку, линейка штриховкой, линейные размеры *в* и *h* (расстояния от центра шара *C* до мгновенной оси вращения *OO*); на рис. 2.16 дополнительно изображено: траектории движения точек *B*, *H*, *C*, их скорости $\vec{v}_в$, $\vec{v}_н$, $\vec{v}_c$.

$$\upsilon_{\text{B}} = \omega(r + h)\ (1)$$

$$\upsilon_{\text{H}} = \omega(r - h)\ (2)$$

$$\upsilon_{\text{C}} = \omega h\ (3)$$

$$l = \upsilon_{\text{C}} t\ (4)$$

$$h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{в}{2}\right)^2}\ (5)$$

В системе уравнений формулы (1), (2), (3) связывают модуль угловой скорости вращения шара ω с модулями линейных скоростей υ_B, υ_H, υ_C его точек *B*, *H*, *C*. Формула (4) выражает путь *l* равномерного

движения центра шара, пройденный точкой C за время t, формула (5) следует из рис. 2.15.

$$\upsilon_B = \frac{l\left(r+\sqrt{r^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}\right)}{t\sqrt{r^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}},\ \upsilon_H = \frac{l\left(r+\sqrt{r^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}\right)}{t\sqrt{r^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}}$$

$$\upsilon_B = \frac{120\ \ см\left(3,0\ \ см + \sqrt{(3,0\ \ см)^2 + \left(\frac{4,0\ \ см}{2}\right)^2}\right)}{2,0\ \ с\sqrt{(3,0\ \ см)^2 - \left(\frac{4,0\ \ см}{2}\right)^2}} = 1{,}4 \cdot 10^2\ \ \frac{см}{с}$$

$$\upsilon_H = \frac{120\ \ см\left(3,0\ \ см - \sqrt{(3,0\ \ см)^2 - \left(\frac{4,0\ \ см}{2}\right)^2}\right)}{2,0\ \ с\sqrt{(3,0\ \ см)^2 - \left(\frac{4,0\ \ см}{2}\right)^2}} = 20\ \ \frac{см}{с}$$

Направления искомых скоростей показаны на рис. 2.16.

Второй способ решения задачи: Качение тела (в данной задаче – шара) можно рассматривать состоящим из двух движений: вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс шара (точка C – на чертеже) относительно неподвижной плоскости Q, в которой находится ось вращения, и поступательного движения (вместе с плоскостью Q) относительно линеек со скоростью центра масс $\vec{\upsilon}$. Движение точек шара B и H относительно линеек также будет складываться из двух: движения по окружности радиусом r (с одинаковыми по модулю скоростями $\vec{\upsilon}_B$ и $\vec{\upsilon}_H$) и движения вместе с плоскостью Q со скоростью $\vec{\upsilon}_C$.

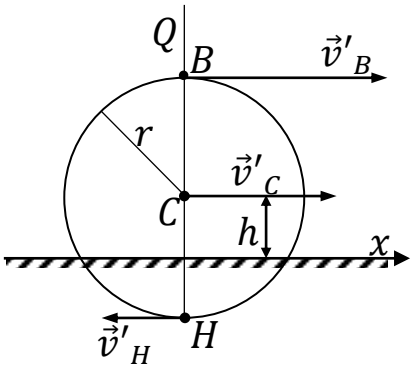


Рис. 2.17

На рис. 2.17 изображено: шар окружностью радиусом r, линейка (штриховкой), точки шара B, H, C, их скорости (в указанных в фи-

зическом смысле задачи системах отсчета), ось координат X, h – расстояние от опоры до центра масс шара по вертикали.

$l = \upsilon_C t$ (1)

$\upsilon'_в = \upsilon'_н = \omega r$ (2)

$\upsilon_{вх} = \upsilon_{сх} + \upsilon'_{вх}$ (3)

$\upsilon_{нх} = \upsilon_{сх} + \upsilon'_{нх}$ (4)

$\upsilon_{сх} = \upsilon_с$, $\upsilon_{вх} = \upsilon'_в$, $\upsilon'_{нх} = -\upsilon'_н$

В системе уравнений формула (1) выражает путь l, пройденный точкой С равномерно за время t, формула (2) дает значение модуля линейной скорости точки вращающегося тела через угловую скорость вращения и расстоянием точки тела до оси вращения (в данном случае обе точки B и H находятся на одном расстоянии r от оси вращения), формулы (3), (4) записаны в проекции на ось координат X и следуют из теоремы сложения скоростей (в данном случае – линейных), равенства без номеров следуют из чертежа и дают значения проекций соответствующих скоростей.

$$\upsilon_B = 1{,}4 \cdot 10^2 \ \frac{см}{с}, \upsilon_H = -20 \ \frac{см}{с}.$$

Знаки ответа позволяют указать направления искомых скоростей: скорость верхней точки шара направлена по оси координат X, скорость нижней точки – против оси координат X.

2.5. Шар радиусом 16 см насажен на горизонтальную ось и катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью 60 см/с, описывая окружность радиусом 30 см. Определить полную угловую скорость шара.

СГС

$r = 16$см

$v = 60 \frac{см}{с}$

$R = 30$см

$\vec{\omega}$–?

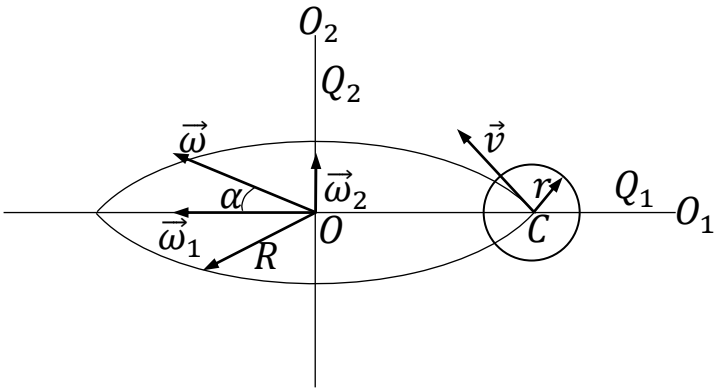


Рис. 2.18

В системе отсчета, связанной с плоскостью Q_1, проходящей через горизонтальную ось OO_1, вращается шар радиусом r вокруг гори-

зонтальной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ (при этом центр масс шара – точка C – при движении в горизонтальной плоскости со скоростью $\vec{\upsilon}$описывает окружность радиусом R). В системе отсчета, связанной с плоскостью Q_2, проходящей через точку O и расположенной вертикально, например, в плоскости чертежа вращается вокруг оси OO_2, плоскость Q_1 (расположенная, например, перпендикулярно плоскости чертежа) с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$; и в этой же системе отсчета вращается шар с угловой скоростью $\vec{\omega}$, названной в тексте задачи полной угловой скоростью (эта скорость находится по теореме сложения скоростей $\vec{\omega}=\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2$, что и отражено на чертеже).

На рис. 2.18 изображено: шар окружностью радиусом r, траектория движения точки C – окружностью радиусом R, угол α, образованный скоростью $\vec{\omega}$ с горизонтальной плоскостью; остальные элементы чертежа названы в физическом смысле задачи.

$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ (1), $\upsilon = \omega_2 R$ (3),

$\alpha = arctg(\frac{\omega_2}{\omega_1})$(2), $\upsilon = \omega_1 r$ (4).

В системе уравнений формулы (1) и (2) следуют из чертежа и позволяют определить модуль векторной величины $\vec{\omega}$ и ее направление, формула (3) связывает линейную скорость точки C плоскости Q_1 с угловой скорость ее вращения и расстоянием точки C до оси вращения, формула (4) связывает линейную скорость поступательного движения катящегося без скольжения шара с угловой скоростью вращения шара вокруг оси, проходящей через его центр масс и расстоянием центра масс шара до опоры.

$\omega = \frac{\upsilon}{rR}\sqrt{R^2 + r^2}$, $\alpha = arctg(\frac{r}{R})$

$\omega = \frac{60 \quad см/с}{16 \quad см \cdot 30 \quad см}\sqrt{(30 \quad см)^2 + (16 \quad см)^2} = 4,2 \quad c^{-1}$,

$\alpha = arctg(\frac{16\ см}{30\ см})$=$28^0$.

2.7.2. Задачи для самостоятельного решения

2.6. По наклонной плоскости пустили катиться снизу вверх маленький шарик. На расстоянии 40 см от начала пути шарик побывал дважды: через 3 с и через 4 с после начала движения. Определить начальную скорость и ускорение шарика, считая его постоянным.

2.7. Наблюдатель, стоящий в момент начала движения поезда у его переднего края, определил, что первый вагон прошел мимо него за $t_1 = 6$ с. Сколько времени мимо него будет двигаться пятый вагон? Движение считать равноускоренным.

2.8. Камень, брошенный на высоте $h = 2$ м над землей, упал на расстоянии $s = 7$ м от места бросания (считая по горизонтали). Найти его начальную и конечную скорости, а также угол падения.

2.9. Камень брошен под углом к горизонту. Начальная скорость равна $10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а спустя 0,5 с скорость камня равна $10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. На какую высоту над начальным уровнем поднимется камень.

2.10. Диск, вращающийся с частотой $1200\ \text{мин}^{-1}$, в результате торможения остановился через 20 с. Найти угловое ускорение, считая его постоянным, и число оборотов с момента начала торможения до остановки.

2.11. Движение точки задано уравнениями: $x = 10\cos 2\pi \cdot \frac{t}{5}$, $y = 10\sin 2\pi \cdot \frac{t}{5}$ (x, y – в сантиметрах, t – в секундах). Найти траекторию точки, скорость, тангенциальное, нормальное и полное ускорения.

2.12. Камень брошен вертикально вверх со скоростью $v_0 = 15\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Через сколько времени он будет на высоте: а) $h_1 = 10$ м? б) $h_2 = 12$ м?

2.13. Поезд движется по закруглению с радиусом 400 м, причем его тангенциальное ускорение равно $0{,}2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Определить его нормальное и полное ускорение в тот момент, когда его скорость равна $10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

2.14. Колесо, вращающееся с частотой $1500\ \frac{\text{об}}{\text{мин}}$, при торможении стало вращаться равнозамедленно и остановилось через 30 с.

Найти угловое ускорение и число оборотов с момента начала торможения до остановки.

2.15. Некоторое тело начинает вращаться с постоянным угловым ускорением $0{,}04\ \text{с}^{-2}$. Через сколько времени после начала вращения полное ускорение какой-либо точки тела будет направлено под углом $75°$ к направлению скорости этой точки (решить в общем виде)?

2.16. Уравнение траектории тела, движущегося близко от Земли, имеет вид: $y = -0{,}196x^2 + 1{,}732x$ (ось x – горизонтальна, ось y – вертикальна). Определить начальную скорость тела; полное, нормальное и тангенциальное ускорения в момент удара о землю; время движения.

2.17. Путь, пройденный точкой по окружности радиусом 2 м, выражен уравнением $s = bt^2 + ct$. Найти нормальное, тангенциальное и полное ускорение точки через $0{,}5$ с после начала движения, если $b = 3\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $c = 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Глава 3. ДИНАМИКА

3.1. Первый закон Ньютона. Принцип относительности Галилея

Динамика изучает движение материальных тел как результат взаимодействия между ними. Ее основу составляет три закона, которые получили названия первого, второго и третьего законов Ньютона. Три этих общих закона и три закона, которым подчиняются отдельные виды сил (закон всемирного тяготения, закон Гука и закон Кулона-Амонтона), и являются тем фундаментом, на котором построена динамика. Остальная часть динамики представляет собой следствия этих законов, применения их к конкретным случаям.

Отдельные следствия законов Ньютона сами по себе являются весьма общими физическими законами. Поскольку основным понятием динамики Ньютона является понятие силы, то иногда ее называют силовой механикой. Во всяком случае в ее основе лежит силовой метод анализа механического движения, т.е. объяснение его с точки зрения сил.

Динамика решает две *основные задачи*:

1) по действующим на тело силам определить кинетические характеристики его движения;

2) по кинетическим характеристикам движения тела определить действующие на него силы.

Первый закон Ньютона (первый закон динамики). *Всякая материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока другие тела не выведут её из этого состояния.*

Это положение было открыто Галилеем. Не случайно Ньютон, понимая все его значение, включил его в свою книгу «Математические начала натуральной философии» первым законом динамики. Этот закон говорит об эквивалентности состояний покоя и равномерного прямолинейного движения. До Галилея со времен Аристотеля (IV в. до н.э.) считали, что в отличие от состояний покоя состояние движения у тел возникает лишь под действием внешних воздействий: например, чтобы равномерно и прямолинейно двигать книгу по столу, необходимо постоянное воздействие на нее руки. Конечно, такое рас-

суждение является поверхностным (забывается трение), но такие взгляды продержались в физике примерно 2000 лет. Нужен был огромный талант Галилея, чтобы обнаружить эту ошибку, и большая смелость, чтобы выступить против вековых традиций. Галилеем же было введено в физику понятие инерции.

Определение. Под *инерцией* понимается свойство материальных объектов сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Этим свойством обладает любой вид материи, а не только вещество. Инерция не имеет меры и не может быть поэтому выражена числом. Все тела инерционны в одинаковой степени. Это нужно понимать так: как горошина, как и нагруженный вагон совершенно одинаково сохраняют состояния покоя или равномерного прямолинейного движения, если их из этих состояний не выводят другие тела. Необходимо отметить, что инерция не «стремление» тел к покою или равномерному прямолинейному движению: тела не стремятся к этим состояниям, они просто в них находятся. Если мы выводим тело из этих состояний, то не нужно при этом «преодолевать» инерцию: внешние усилия необходимы лишь для преодоления трения и для сообщения телам ускорений.

Движение по инерции мы в дальнейшем будем называть лишь равномерное и прямолинейное движение. Движение с ускорением не является движением по инерции. Например, подход автобуса к остановке с выключенным двигателем не будет примером движения по инерции. Величина его скорости зависит от взаимодействий с окружающими телами, имевших место ранее, до того, как движение стало равномерно-прямолинейным. Поэтому скорость автомобиля к моменту начала его движения по инерции может иметь различную величину. В ряде случаев движение можно разложить на два, одно из которых является инерционным, а другое нет. Например, движение тела, брошенного горизонтально, можно разложить на вертикальную и горизонтальную составляющую. Вертикальная составляющая представляет собой равноускоренное движение под действием силы тяжести. В горизонтальном же направлении на тело силы не действуют, и горизонтальная составляющая скорости будет сохраняться неизменной. Можно сказать, что в горизонтальном направлении тело движется по инерции.

Первый закон динамики часто называют *законом инерции*. Поставим перед собой вопрос: справедлив ли закон инерции в любых системах отсчета?

Даже весьма приближенный анализ механических явлений говорит о том, что он выполняется далеко не во всех системах отсчета. Так, положенный на горизонтальный стол мяч сохраняет состояние покоя. То же самое мы будем наблюдать, если положим мяч на горизонтальный пол автобуса, когда он покоится относительно Земли или движется относительно нее равномерно и прямолинейно. Следовательно, в системе отсчета, связанной с автобусом, которая относительно первой движется равномерно и прямолинейно, закон инерции выполняется.

Если же автобус быстро увеличивает свою скорость, или, наоборот, резко тормозит, или круто поворачивает (во всех этих случаях автобус движется с ускорением относительно Земли), то мяч придет в движение относительно автобуса, хотя и нет тел, которые его выводили бы из состояния покоя. Следовательно, в данных случаях закон инерции в системе отсчета, связанной с автобусом, не выполняется.

В связи с этим все системы отсчета принято делить на два класса. Системы отсчета, в которых закон инерции выполняется, получили название *инерциальных*. Системы отсчета, в которых закон инерции не выполняется, называются *неинерциальными*.

Значение первого закона Ньютона состоит не только в утверждении равнозначности покоя и равномерного прямолинейного движения. Он дает возможность определять, является ли система отсчета инерциальной и утверждает существование хотя бы одной такой системы. Действительно, так как закон выполняется только в инерциальной системе, то хотя бы одна такая система должна существовать. Но если существует хотя бы одна инерциальная система, то их должно существовать множество, так как все системы отсчета, движущиеся относительно первой равномерно и прямолинейно, будут тоже инерциальными.

Является ли система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, инерциальной? Грубо поставленный эксперименты (типа - наблюдение за поведением положенного на горизонтальный стол мяча) говорят о выполнении закона инерции в системе отсчета, связанной с

Землей. Однако более тонкие эксперименты убеждают нас в обратном. Рассмотрим два опытных факты.

1) *Отклонение падающих тел к востоку*. Отклонения эти невелики, но вполне могут быть измерены. Объяснить их очень легко, учитывая вращение Земли. Допустим, что мы отпускаем тело с верхней части башни. Так как верхняя часть башни дальше удалена от центра Земли, чем её основание, то её линейная скорость, направленная горизонтально, больше, чем у основания (рис. 3.1).

Поэтому камень имеет большую горизонтальную скорость по сравнению со скоростью основания башни и за время своего падения несколько опередит её. Как известно, Земля вращается с запада на восток, а поэтому и тело при падении отклоняется от вертикали к востоку.

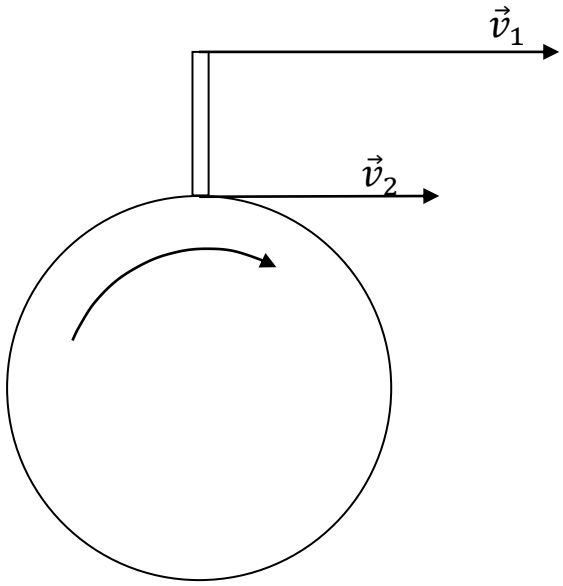


Рис. 3.1

2) *Опыт Фуко*, который заключается в наблюдении за плоскостью качания математического маятника. Для того, чтобы колебания можно было наблюдать в течение достаточно длительного промежутка времени, Фуко (1850 г.), использовал маятник с длиной нити в 67 м и весом груза в 28 Кг. Силы упругости и тяготения, действующие на груз маятника, находятся все время в плоскости его качания и, следовательно, вывести его из этой плоскости не могут. Так как вдоль оси, перпендикулярной к плоскости качаний, ни одно тело на маятник не действует, то вдоль этой же оси маятник по инерции должен сохранять состояние покоя. Опят показал, что плоскость качания маятника

постепенно поворачивается по отношению к Земле. Следовательно, закон инерции вдоль оси перпендикулярной к плоскости качания не выполняется. Отсюда следует, что система отсчета, связанная с Землей, является неинерциальной.

Оказалось, что плоскость качаний маятника Фука сохраняет практически неизменное положение в системе отсчета, связанной с центром Солнца оси координат которой направлены на удаленные звезды (эта система отсчета не вращается вместе с Солнцем).

Однако, отклонение от инерциальности системы отсчета, связанной с Землей, невелики и в первом приближении ее можно считать инерциальной. В дальнейшем мы так и будем поступать за исключением нескольких случаев, о чем будут сделаны специальные оговорки.

Закон инерции имеет очень глубокий физический смысл. Из него вытекают представления о том, каковы должны быть свойства, чтобы движение тел в нем подчинялись законам механики Ньютона. Так как закон инерции в инерциальных системах выполняется вне зависимости от направления, то свойства пространства в этих системах отсчета должны быть одинаковыми по всем направлениям. Другими словами, в механике Ньютона пространство *изотропно*. Далее из закона инерции вытекает, что пространство должно быть также и *однородным*, т.е. в нем нет каких-либо точек, которые выделялись бы по отношению к другим. В самом деле, при движении тела по инерции его скорость не изменяется от того, что оно переходит из одной точки пространства в другую. Следовательно, у этих точек нет каких-либо особых свойств, которые могли бы вызвать изменение скорости движения тел; все точки пространства равноправны.

Ещё Галилей пришел к следующему выводу: *во всех инерциальных системах отсчета все механические явления протекают одинаково при одинаковых начальных условиях*. Это положение называется механическим **принципом относительности Галилея**. Из него следует, что никакими механическими опытами, проведенными в инерциальной системе, нельзя обнаружить, находится ли она в покое или в равномерном прямолинейном движении относительно другой инерциальной системы.

3.2. Второй закон Ньютона. Сила, масса

Одним из основных понятий динамики является понятие силы.

Определение. *Сила* есть физическая величина, характеризующая механическое действие одного тела на другое, в процессе которого возникает ускорение.

Физических действий может быть очень много. Так, например, если приложить руку к радиатору парового отопления, то кроме его механического действия на руку мы будем наблюдать и тепловое действие. Однако, не все величины, характеризующие механическое действие, мы можем назвать силой. Кроме неё существует ряд физических величин, которые тоже характеризуют механические действия (давление, импульс тела и т.п.). Сила характеризует лишь такое механическое действие, которые вызывает ускорение.

В механике рассматривается три вида сил:

1) силы тяготения,

2) силы упругости,

3) силы трения.

Изучения вопроса о происхождении этих сил выходит за рамки механики, в ней рассматривается только проявление этих сил. Механику лишь интересует, при каких условия эти силы возникают и как влияют на движение тел в том или ином случае.

Сила является векторной величиной. Она характеризуются не только числовой мерой, но и направлением в пространстве. Кроме того, в отличие от векторов скорости, ускорения и др., сила характеризуется еще точкой приложения. В зависимости от точки приложения силы характер движения тела может быть различным. Это легко проверить, подействовав рукой на какое-либо тело (например, стул) параллельно в различных точках.

Остановимся на точках приложения некоторых сил. Как известно, вес тела приложен к его центру тяжести, при этом следует всегда иметь в виду, что к центру тяжести приложена лишь равнодействующая всех элементарных сил тяжести, приложенных к элементарным частям тела.

Когда тело соприкасается с опорой, то на него действует сила упругости со стороны опоры. Эту силу обычно называют реакцией

опоры или силой нормального давления, так как она является силой давления опоры на тело и направлена по нормали к его поверхности. Обычно показываемая нами на чертежах сила нормального давления тоже есть равнодействующая всех элементарных сил нормального давления, действующих на отдельные элементарные части опорной поверхности тела. Сила нормального давления приложена к поверхности тела, соприкасающейся с опорой, причем ее точка приложения зависит от распределения и величин элементарных сил реакции. Если тело лежит на горизонтальной опоре, то линия действия силы нормального давления проходит через центр тяжести тела. Другие случаи будут рассмотрены позднее.

Очевидно, что и сила трения является, вообще говоря, равнодействующей всех элементарных сил трения, действующих на отдельные элементарные площадки трущейся поверхности. Она приложена к поверхности, испытывающей трение, в той же точке, что и сила нормального давления. Последнее станет очевидным после того, как мы познакомимся с законом, которому подчиняются силы трения.

Силы могут действовать не только по всему объему тела или по его поверхности, но и в определенной точке (рис. 3.2). При этом силы нормального давления будут тоже нормальны к разделяющим поверхностям или линиям. Если к телу прикреплены нити (рис. 3.3), то силы их реакции или, так называемые, силы натяжения нитей будут приложены в точках их прикрепления к телу и направлены вдоль нитей.

Для того, чтобы измерять силы нужно выбрать эталон и установить способ сравнения с этим эталоном.

За эталон силы принят вес платиноиридиевого цилиндра, хранящегося в Международном бюро мер и весов. Эта единица силы называется килограммом (кг). Способом сравнения других сил с эталоном является их уравновешение: если измеряемая сила уравновешивает эталонную (тело, на которое они действуют, остается в покое или в равномерном и прямолинейном движении), то они считаются равными. Обычно эталонную силу (1 кг) сравнивают с силой натяжения пружины. При этом замечают, при каком удлинении данной пружины ее сила натяжения равна эталонной силе. Очевидно, способ сравнение сил позволяет воспроизводить силу - эталон в любом количестве экземпляров. Имея серию эталонов, можно с их помощью про-

градуировать пружину – получить динамометр, которым обычно и пользуются на практике для измерения сил.

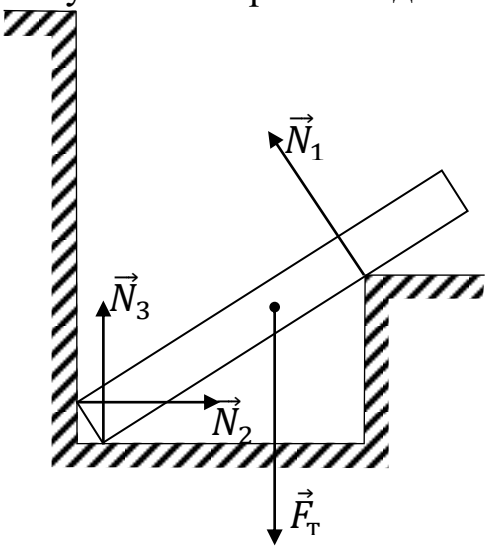


Рис. 3.2

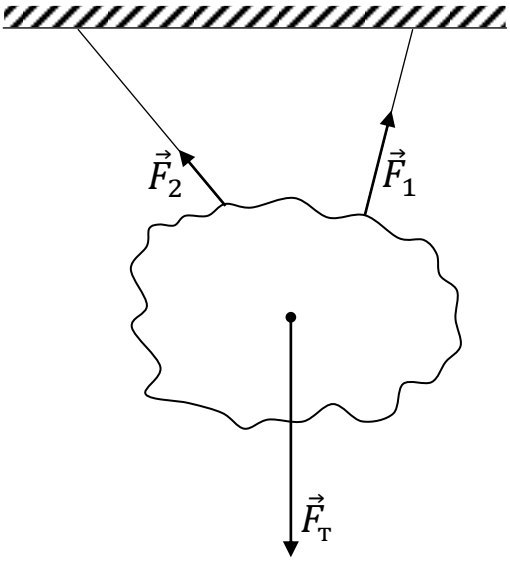


Рис. 3.3

Опыты убеждают в том, что ускорения, которые получает какое-либо определенное тело, прямо пропорциональны величинам приложенных сил и направлены по направлению этих сил.

Однако, если на разные тела действовать одинаковыми силами, то они будут приобретать различные ускорения. Под инертность (не путать в дальнейшем с инерцией) понимают свойство тел по-разному реагировать (приобретать различные ускорения) на воздействие силы. Инертность того тела считается большей, которое под действием той же силы получает меньшее ускорение.

Мерой инертности является масса.

Ньютон открыл закон, который называется **вторым законом динамики** или **второй закон Ньютона**: *ускорение материальной точки прямо пропорционально приложенной к ней силе, обратно пропорционально ее массе и направлено по направлению силы*.

Математически второй закон Ньютона может быть записан в виде:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Аналогично первому закону второй закон Ньютона выполняется лишь для материальных точек. В случае вращательного движения он принимает другую форму. Что мы и увидим в дальнейшем.

Необходимо отметить, что второй закон динамики отражает причинно-следственную связь между силой и ускорением: причиной является сила, следствием – ускорение. Второй закон Ньютона выполняется не только в инерциальных системах отсчета. Для того, чтобы применить этот закон к конкретному случаю, нужно первоначально убедиться, что движение нами рассматривается в инерциальной системе отсчета. В написанном виде закон выполняется только для случая движения тел со скоростями малыми по сравнению со скоростью света. Оказалось, что масса зависит от состояния его движения: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, где m_0 – масса покоящегося тела, m – масса движущегося тела, v – скорость движения, c – скорость света в вакууме.

Из формулы видно, что при $v \ll c, m \cong m_0$. В механике Ньютона, которая рассматривает движение тел со скоростями, много меньшими скорости света, масса тела считается постоянной.

Ньютон не выделял в виде отдельного закона **закон независимости действия сил**, но пользовался им в скрытой форме. Этот закон заключается в существующем: *если на материальную точку действует несколько сил, то получаемое точкой ускорение равно сумме ускорений, которые имела бы точка под действием каждой из сил в отдельности.*

Из закона независимости действия сил вытекает, что при нахождении ускорения тела можно использовать два пути:

1) найти ускорения, вызываемые каждой силой, считая, что вторая сила не влияет на действие первой, а затем полученные ускорения сложить (рис. 3.4);

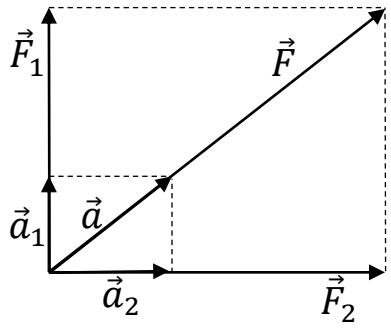


Рис. 3.4

2) сначала сложить силы (опять считая, что они друг на друга не влияют), а затем по равнодействующей найти ускорение.

Второй путь короче, а поэтому он чаще применяется при решении задач.

Из закона независимости сил вытекает, что в случае действия на материальную точку нескольких сил, ускорение точки можно найти по формуле:

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

Эта формула выражает второй закон Ньютона для случая действия на точку нескольких сил.

Данное векторное равенство можно написать в проекциях на оси координат. Обычно эти равенства пишут в следующей форме:

$$ma_x = \sum F_x,\ ma_y = \sum F_y,\ ma_z = \sum F_z.$$

Введем новую физическую величину.

Определение. Векторная физическая величина равная произведению массы тела на его скорость и имеющая направление вектора скорости, называется *импульсом* или *количеством движения*.

Если в формуле второго закона Ньютона ускорение заменить первой производной скорости по времени: $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}$, и освободившись от дробей, подвести массу, как постоянную величину, под знак дифференциала, то мы получим: $d\,\overrightarrow{(mv)} = \vec{F}\,dt$.

Определение. Величина, равна произведению силы на время ее действия, называется *импульсом силы*.

Полученное нами выражение означает, что *изменение количества движения точки равно импульсу действующей на нее силы и происходит по направлению силы*. Именно в такой форме и был сформулирован Ньютоном второй закон динамики. Форма же записи этого закона, которой мы пользовались раньше, была введена в механику Эйлером.

Второй закон Ньютона показывает, что для изменения скорости тела необходимо действие силы в течение определенного промежутка времени. Если бы сила действовала мгновенно ($dt = 0$), то изменение скорости движения тела было бы равно нулю. Поэтому нельзя мгновенно остановить движущееся тело или изменить направление его движения; нельзя покоящемуся телу мгновенно сообщить ту или иную скорость.

3.3. Третий закон Ньютона

Третий закон Ньютона (третий закон динамики) гласит: *силы, с которыми какие-либо тела действуют друг на друга, всегда равны по величине и противоположны по направлению.*

Например, на столе лежит тело (рис. 3.5). С какой силой это тело действует на стол ($\vec{F}$), с такой же силой стол действует на тело ($\vec{N}$). По величине силы равны, но противоположны по направлению: $\vec{F} = -\vec{N}$.

Третий закон Ньютона говорит о том, что силы всегда возникают попарно, что нет одностороннего действия, что силы носят характер взаимодействий. В этом и заключается качественная сторона закона.

В качестве примера на применение законов Ньютона выясним, одинакова ли сила натяжения нити в различных её точках при движении.

Пусть нить связывает два тела. Правое из них движется с ускорением a и приводит в движение с таким же ускорением как нить, так и второе тело (рис. 3.6, а). Нить действует на тело с силами натяжения F_1 и F_2. В свою очередь тела действуют на нить с силами F_1' и F_2' (рис. 3.6, б). Согласно третьему закону Ньютона: $F_1 = F_1'$ и $F_2 = F_2'$.

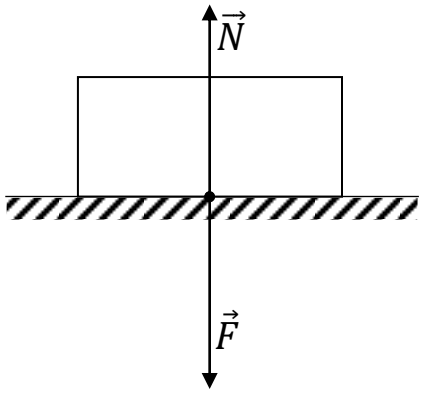


Рис. 3.5

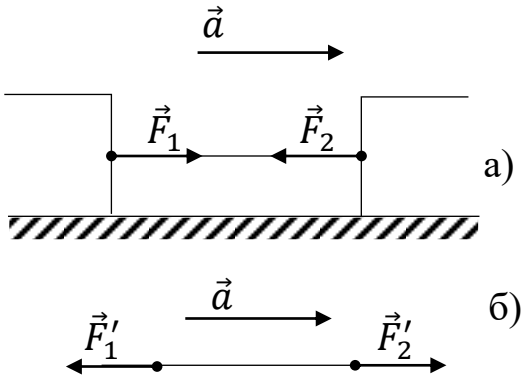


Рис. 3.6

Для расчетов нам достаточно знать только численные значения этих сил, а поэтому знаки, отражающие их направленность, опущены.

Напишем второй закон Ньютона для нити в проекции на ось, совпадающую по направлению с вектором ускорения: $ma = F_1' - F_2'$.

Дальше возможны следующие случаи:

1) Нить невесома, т.е. $m = 0$, тогда $F_1' = F_2'$ и поэтому $F_1 = F_2$.

Следовательно, в случае невесомой нити, а обычно при решении задач массой нитей пренебрегают, силы натяжения во всех её точках одинаковы.

2) Нить весома, т.е. $m > 0$, тогда в случае ускоренного движения $(a \neq 0)$ $F_2' > F_1'$ и $F_2 > F_1$.

Если же движение равномерно, то $a = 0$ и $F_2' = F_1'$, а поэтому $F_2 = F_1$.

Следовательно, для весомой нити в случае ее равномерного движения силы натяжения нити во всех её точках одинаковы, а в случае неравномерного движения – различные.

Подведем итоги всему сказанному выше. Механика Ньютона опирается на три основные утверждения:

1) любая сила обусловлена действием одного тела на другое;

2) ускорения вызываются только силами;

3) все силы носят характер взаимодействия.

В этих основных положениях и отражается качественная сторона механики Ньютона.

3.4. Механическая система. Закон сохранения количества движения

Определение. Под *механической системой* понимается группа тел, взаимодействующих между собой так, что движение каждого из них зависит от движения остальных тел.

Примерами механических систем являются все машины, строительные сооружения, наша солнечная система и т.п. Однако не любая группа тел является механической системой. Рой комаров, стая птиц, эскадрилья самолётов и т.п. не относится к механическим системам, так как любой комар, птица или самолет может покинуть «систему», не нарушив движения остальных. В приведенных выше случаях тела не связаны между собой взаимодействиями, а именно наличие взаимодействий межу отдельными телами и есть главное, что характеризует механическую систему.

Силы, действующие на тела системы, можно разбить на два класса: на *силы внешние* и *силы внутренние*.

Определение. Внешними называются силы, с которыми действуют на данную систему тела, не входящее в нее.

Определение. Внутренними называют силы, с которыми тела данной системы действуют друг на друга. Как известно, стул состоит из ножек, проножек, царг и т.д. все эти части взаимодействуют между собой, а поэтому стул можно рассматривать как механическую систему. Силы взаимодействия между отдельными частями стула (например, ножками и проножками) являются внутренними силами. Сила тяжести, сила давления на стул со стороны пола, сила трения являются внешними силами.

Разделение сил на внешние и внутренние условно и зависит от того, какую группу тел мы рассматриваем в качестве системы. Так, например, силы взаимодействия между вагонами поезда являются внешними, если рассматривать каждый вагон как механическую систему, но эти же силы станут внутренними, когда весь состав рассматривается как одна система.

Легко можно доказать, что сумма внутренних сил равна нулю. Допустим, мы имеем изолированную систему (внешние силы не действуют), состоящую из двух взаимодействующих тел (рис. 3.7). Согласно третьему закону Ньютона $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{-F_2}$ или $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = 0$. В применении же к системе эти силы являются внутренними. Так как сумма внутренних сил равна нулю, то внутренние силы изменить движение системы не могут.

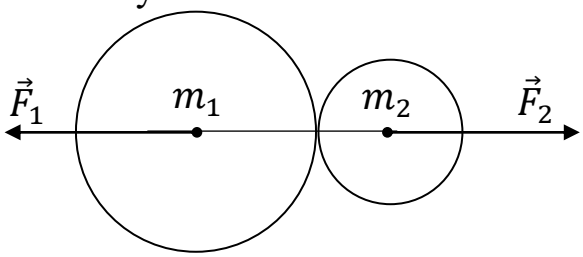


Рис. 3.7

Напишем для каждого тела второй закон Ньютона и сложим эти выражения:

$$m_1 d\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{F_1} dt$$
$$m_2 d\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{F_2} dt$$

$$m_1 d\overrightarrow{v_1} + m_2 d\overrightarrow{v_2} = (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2})\, dt$$

Подведя массу, как постоянную величину, под знак дифференциала, получим:

$$d(m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}) = 0 \text{ или } m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = const$$

Не трудно сообразить, что сумма импульсов будет величиной постоянной и для систем, состоящих из большего числа тел; в правой части равенства силы взаимодействия будут попарно давать нуль, а левая часть даст сумму импульсов. Поэтому *для механических изолированных систем с произвольным количеством входящих в них тел можно написать:*

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = const$$

В этом и заключается **закон сохранения количества движения (импульса)**, который, как мы видим, *является следствием второго и третьего законов Ньютона*. Следует обратить внимание на то, что он выполняется только в изолированных системах.

3.5. Силы, действующие на точку при криволинейном движении

Пусть материальная точка движется ускоренно по криволинейной траектории (рис. 3.8). При этом она имеет как нормальное, так и тангенциальное ускорение. Общее ускорение $\vec{a}$ легко найти по правилу параллелограмма. В этом же направлении на точку действует и вызывающая его сила $\vec{F}$. Поскольку мы раскладываем ускорение на нормальную и тангенциальную составляющие, поскольку можно и силу $\vec{F}$ разложить на нормальную ($\vec{F}_n$) и тангенциальную ($\vec{F}_\tau$) составляющие. Для нормального и тангенциального направления можно написать второй закон Ньютона:

$$m\vec{a}_n = \vec{F}_n,\ m\vec{a}_\tau = \vec{F}_\tau$$

Так как $a_n = \frac{v^2}{R}$, то последнее равенство можно переписать: $\frac{mv^2}{R} = F_n$. Рассмотрим несколько примеров применения второго закона Ньютона в случае криволинейного движения тел.

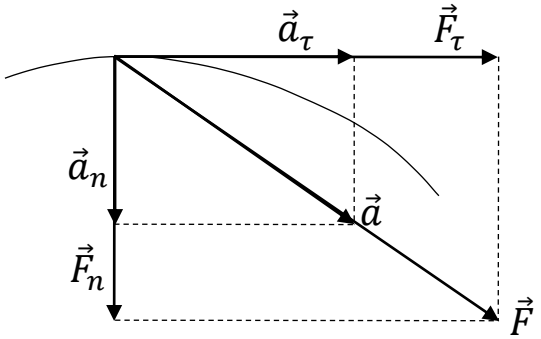


Рис. 3.8

1) Пусть тело скользит без трения по поверхности сферы с центром в точке O (рис. 3.9). На тело действует сила тяжести $\vec{F}_т$, приложенная в центре тяжести и направленная вертикально вниз, а так же сила реакции $\vec{N}$ со стороны поверхности, направленная нормально к разделяющим поверхностям, т.е. по радиусу, и приложенная к телу в точке соприкосновения его со сферической поверхностью.

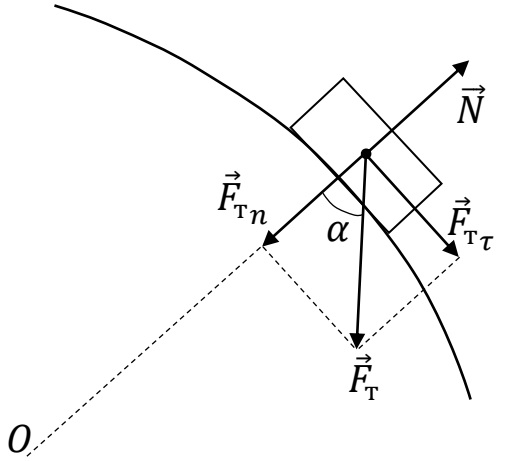


Рис. 3.9

Спроектируем силу $\vec{F}_т$ на нормальную и касательную и напишем для этих взаимно перпендикулярных направлений второй закон Ньютона: $ma_\tau = F_т \sin\alpha$, $ma_n = F_т \cos\alpha - N$ (так как нормальное ускорение направлено по радиусу к центру, то в правой части равенства нормальная составляющая $\vec{F}_т$, направленная по направлению ускорения пишется со знаком плюс, а сила $\vec{N}$, направленная противоположно ускорению, пишется со знаком минус).

2) Движение транспорта по мосту. Обычно мосты строятся горизонтальными, но под действием идущего по ним транспорта они прогибаются (конечно, незначительно) и становятся вогнутыми (рис. 3.10). Если транспорт находится на середине вогнутого моста, то действующие на него силы $\vec{F}_т$ и $\vec{N}$ направлены по одной прямой в противоположные стороны. Так как нормальное ускорение направлено к центру кривой, которую образует мост, то $\frac{mv^2}{R} = N\text{-}F_т$, откуда видно, что сила нормального давления больше веса на величину $\frac{mv^2}{R}$. Сила, с которой транспорт давит на мост, равна силе, с которой мост давит на

транспорт (согласно третьему закону Ньютона). Поэтому при движении транспорта по вогнутому мосту он давит на него с силой, большей его веса на величину $\frac{mv^2}{R}$. Если транспорт остановится ($v = 0$), то он будет давить на мост с силой, равной весу.

Когда транспорт въезжает на вогнутый мост, то силы $\vec{F}_т$ и $\vec{N}$ не направлены по одной прямой и уравнений движения будет два:

$$ma_\tau = F_т \sin\alpha \text{ и } \frac{mv^2}{R} - F_т \cos\alpha$$

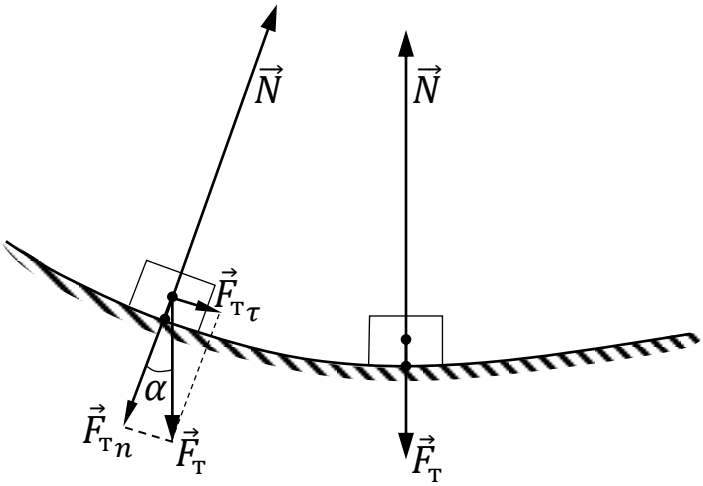


Рис. 3.10

3) Движение искусственного спутника Земли по круговой орбите (рис. 3.11). На спутник действует только вес, направленный к центру его орбиты.

Поэтому $\frac{mv^2}{R} = F_т$. Но так как $F_т = mg$, $v = \sqrt{gR}$.

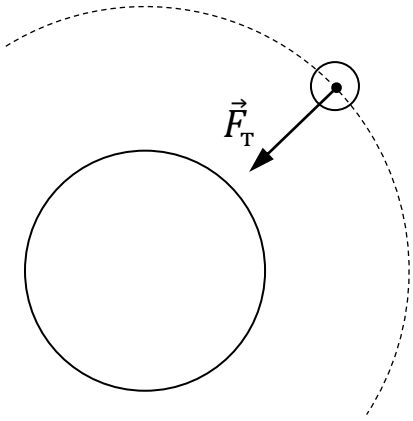


Рис. 3.11

Скорость, при которой спутник движется по круговой орбите вокруг Земли, называется первой космической скоростью. Определим величину первой космической скорости непосредственно у поверхности Земли. В этом случае за радиус орбиты можно принять средний радиус Земли (6372 км), а g = 9,8 $\frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$. Подсчет показывает, что первая космическая скорость равна 7,9 $\frac{\text{км}}{\text{сек}}$. С увеличением высоты g уменьшается, а поэтому и значение первой космической скорости будет уменьшаться. Как вычислить первую космическую скорость на любой высоте, мы узнаем несколько позднее.

3.6. Твердое тело как система материальных точек. Центр массы

Нам уже известны законы движения материальных точек. Поставим перед собой задачу: перейти от законов движения материальных точек к законам движения абсолютно твердого тела. С этой целью мы мысленно разделим тело на столь малые объемы, что каждый из них можно будет считать материальной точкой. Для этого эти объемы не нужно выбирать бесконечно малыми. Вполне достаточно, чтобы они были малы по сравнению с теми или иными расстояниями, существенными для данной задачи. Например, при рассмотрении вращения тела вокруг оси размеры этих элементов должны быть малы по сравнению с их расстоянием от оси. Таким образом, твердое тело можно себе представить как систему материальных точек. В связи с тем, что в абсолютно твердом теле расстояние между его отдельными точками со временем не изменяются, твердое тело является неизменяемой системой материальных точек. Эти точки взаимодействуют друг с другом с силами, которые будут внутренними для данной системы.

Рассмотрим вначале произвольную механическую систему.

Для каждой ее точки можно написать:

$$\Delta m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F} + \vec{f},$$

где $\vec{F}$ – внешняя сила, $\vec{f}$ – внутренняя сила, действующие на данную точку.

Чтобы написать уравнение движения для всей системы, следует сложить уравнения, написанные для всех ее материальных точек. При

этом можно массу, которая в механике Ньютона считается величиной постоянной, подвести под знак производной. Так как сумма производных равна производной от суммы, то: $\frac{d^2}{dt^2}\sum \Delta m_i \vec{r_i} = \sum \vec{F} + \sum \vec{f}$, и так как $\sum \vec{f} = 0$, то $\frac{d^2}{dt^2} \sum \Delta m_i \vec{r_i} = \sum \vec{F}$.

Покажем, что поступательное движение механической системы сводится к движению в произвольной инерциальной системе отсчета точки с координатами $x_c = \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i}$, $y_c = \frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i}$, $z_c = \frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i}$, которая называется ее *центром массы*, или центром инерции.

Положение центра массы может быть задано и в векторной форме. Очевидно, что написанные нами выражения для координат центра массы являются проекциями на оси координат одного векторного равенства: $\vec{r_c} = \frac{\sum \Delta m_i \vec{r_i}}{M}$, где $M = \sum \Delta m_i$ есть общая масса системы. Отсюда $\sum \Delta m_i \vec{r_i} = M\vec{r_c}$. Левую часть уравнения движения тела можно преобразовать:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum \Delta m_i \vec{r_i} = M \frac{d^2 \vec{r_c}}{dt^2} = M\vec{a_c}.$$

Окончательно получаем:

$$M\vec{a_c} = \sum \vec{F}.$$

Мы вывели так называемую **теорему о движении центра массы**: *центр массы системы движется как материальная точка, масса которой равна массе системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему*.

Эта теорема позволяет находить движение центра массы системы, хотя движение отдельных, входящих в нее тел, может быть и неизвестно.

Рассмотрим несколько примеров:

1) При полете снаряда единственной внешней силой является его вес. Его движение происходит по параболе. Если при полете снаряд взрывается, то действующие при взрыве силы, как внутренние в этой системе, не могут изменить движения центра массы. Поэтому центр массы, летящих по разным направлениям осколков, будут продолжать движение по той же параболе (конечно, до тех пор, пока хотя бы один из осколков не упадет на землю).

2) Так как притяжением звезд можно практически пренебречь, то можно считать, что на солнечную систему внешние силы не дей-

ствуют. Поэтому в первом приближении ее центр массы движется в мировом пространстве равномерно и прямолинейно. Очевидно, что центр массы солнечной системы не совпадает с центром Солнца. Поэтому не только планеты, но и центр Солнца обращается вокруг общего центра массы. По вычислениям Б.В. Кукаркина этот период равен 59 годам. Если бы с ближайшей звезды велись наблюдения Солнца, то можно было бы отметить колебания его видимого положения с этим периодом. И, наоборот, если у звезды обнаружены колебания в ее положении, то она должна иметь хотя бы один спутник (планету). Таким методом установлено, что ряд звезд имеет спутников, хотя их и не видно в сильнейшие телескопы.

Так как твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, то для него тоже будет справедлива теорема о движении центра массы. В применении к твердому телу ее можно сформулировать следующим образом: центр массы твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка, имеющая массу этого тела, под действием всех внешних сил, приложенных к нему.

Теорема о движении центра массы позволяет применять второй закон Ньютона не только к материальным точкам, но и к твердому телу.

Пример: Пусть на твердое тело действуют две равные антипараллельные силы (пара сил). Точка C является центром массы (рис. 3.12). Как движется тело?

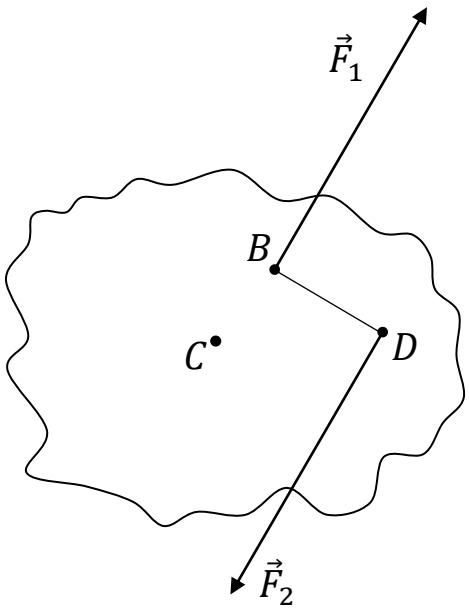


Рис. 3.12

Известно, что пара сил вызывает только вращение. Определим положение оси, вокруг которой будет вращаться тело. На первый взгляд кажется, что эта ось расположена между точками B и D. Однако, это не так. Применив теорему о движении центра массы (приложив к нему все внешние силы), мы увидим, что он сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения (силы уравновешены), а тело вращается. Следовательно, ось вращения проходит через центр массы тела перпендикулярно к плоскости действия пары сил.

Под центром тяжести понимают центр всех параллельных сил тяжести. Его координаты $x_c = \frac{\sum F_{\text{т}i} x_i}{\sum F_{\text{т}i}}$, $y_c = \frac{\sum F_{\text{т}i} y_i}{\sum F_{\text{т}i}}$, $z_c = \frac{\sum F_{\text{т}i} z_i}{\sum F_{\text{т}i}}$. Не трудно заметить, поделив числитель и знаменатель на ускорение свободного падения, мы получим координаты центра массы. Следовательно, положения центра массы является более широким, чем понятие центра тяжести. Действительно, в ряде случаев система имеет центр массы, но не имеет центра тяжести. Например, если около Земли находится тело сравнимое с ней по своим размерам (рис. 3.13), то элементарные силы тяжести, приложенные к отдельным элементам тела не окажутся параллельными, так как все они будут направлены к центру Земли. В связи с этим, согласно определению, тело не будет иметь центра тяжести.

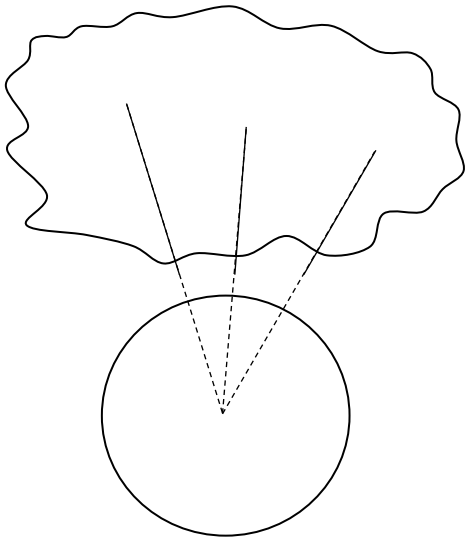


Рис. 3.13

Земля тоже не имеет центра тяжести. Действительно, под силой тяжести мы понимаем силу притяжения тела к Земле. В приложении к

Земле понятия силы тяжести теряет смысл (это сила, с которой Земля притягивает к Земле). Очевидно, что системы Земля – Луна, Солнце – Земля и т.д. не имеют центра тяжести, но имеют центр массы.

3.7. Момент силы, момент инерции

Твёрдое тело наряду с поступательным движением можешь совершать вращение вокруг центра или оси. Вращательный эффект силы характеризуется её моментом.

Определение. *Моментом силы* относительно данной точки называют величину равную векторному произведению радиуса вектора, проведённого в точку приложения силы на эту силу: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.

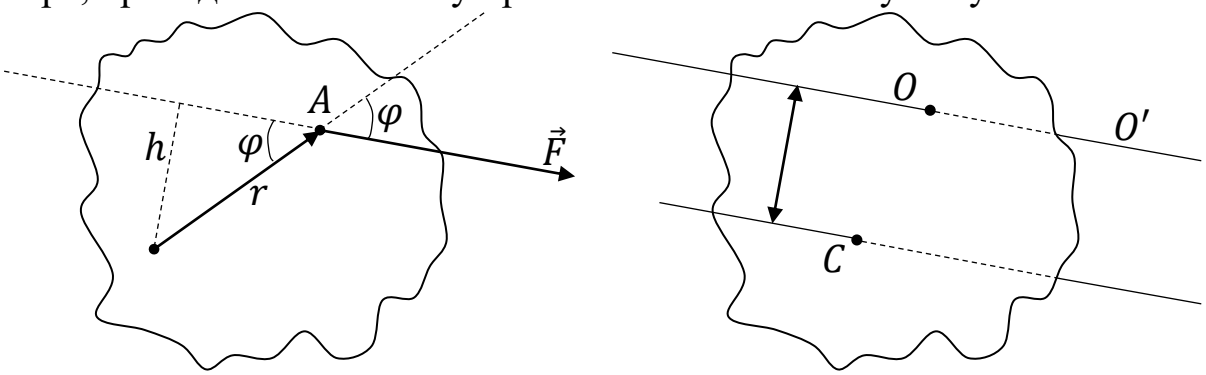


Рис. 3.14

На рис. 3.14 сила $\vec{F}$ приложенная в точке A, действует в плоскости чертежа. Вектор момента силы, определённый по правилу векторного произведения направлен перпендикулярно плоскости чертежа от нас. Найдём его численное значение: $M = rFsin\varphi = Fh$

Величина h, являющаяся кратчайшим расстоянием между точкой, относительно которой определяется момент силы, и её линией действия, называется плечом силы. Численное значение момента силы равно произведению этой силы на её плечо.

Если через точку O перпендикулярно к плоскости чертежа провести ось, то и момент сил относительно этой оси будет равен:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Определение. Величину равную произведению массы данной материальной точки на квадрат её расстояние от оси (или центра) называют *моментом инерции* этой точки относительно оси (или центра):

$$J_i = \Delta m_i {r_i}^2$$

Момент инерции тела равен сумме моментов инерции всех его точек:

$$J_i = \sum \Delta m_i {r_i}^2$$

Приведём без вывода значения моментов инерции для ряда тел:

1) Момент инерции полого тонкостенного однородного цилиндра радиуса R и массой m относительно его оси симметрии

$$J = mR^2$$

2) Момент инерции сплошного однородного цилиндра (или диска) радиуса R и массой m относительно его оси симметрии

$$J = \frac{1}{2} mR^2$$

3) Момент инерции прямого тонкого однородного стержня массой m и длиной l относительно оси перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр массы

$$J = \frac{1}{12} ml^2$$

4) Момент инерции однородного шара радиуса R и массой m относительно оси проходящей через его центр

$$J = \frac{2}{5} mR^2$$

Если нужно узнать момент инерции относительно оси не проходящей через центр массы, то можно воспользоваться теоремой **Гюйгенса-Штейнера.**

Момент инерции тела относительно любой оси равен сумме момента инерции этого тела относительно параллельной ей оси, проходящей через центр массы тела, и произведение массы тела на квадрат расстояния между этими осями (рис. 3.14):

$$J_0 = J_c + md^2$$

Найдём с помощью этой теоремы момент инерции однородного тонкого стержня относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно к стержню:

$$J = \frac{1}{12}\, ml^2 + \frac{1}{4}\, ml^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

3.8. Основной закон вращательного движения твердого тела

Пусть твердое тело имеет возможность поворачиваться вокруг своей оси z и на него в точке O действует произвольно направленная сила $\vec{F}$, линия действия которой не проходит через ось. Скрепим с точкой O прямоугольную систему координат, ось z' которой параллельна оси z, а ось y' – проходит через ось z. Разложим силу $\vec{F}$ на составляющие $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$, $\vec{F}_z$, направленные по осям координат (рис. 3.15). Составляющая Fz вызывать вращение тела не может, так как она направлена параллельно оси и может лишь сдвигать тело вдоль нее. Составляющая $\vec{F}_y$ также не вращает тела, так как ее момент относительно оси равен нулю. Следовательно, вращательное действие произвольно направленной силы сводится к действию ее тангенциальной составляющей.

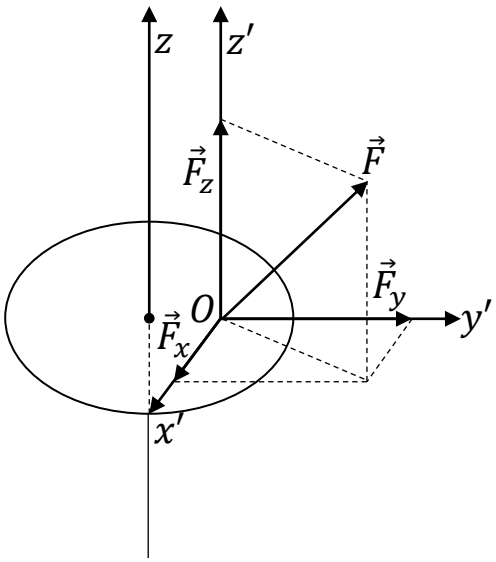


Рис. 3.15

Пусть точка O твердого тела находится на расстоянии r_i от оси и имеет массу Δm_i. Напишем второй закон Ньютона для тангенциального движения точки O:

$$\Delta m_{\text{i}}\,\overrightarrow{a_{\tau_{\text{i}}}} = \overrightarrow{F_{\tau_{\text{i}}}} + \overrightarrow{f_{\tau_{\text{i}}}}.$$

Умножим r_i векторно на обе части полученного равенства и заменим тангенциальное ускорение через угловое:

$$\Delta m_{\text{i}}\left[\vec{r}_{\text{i}} \times \left(\vec{\varepsilon}\times\vec{r}_{\text{i}}\right)\right] = \vec{r}_{\text{i}}\times\overrightarrow{F_{\tau_{\text{i}}}} + \vec{r}_{\text{i}}\times\overrightarrow{f_{\tau_{\text{i}}}}.$$

Раскрыв двойное векторное произведение и заметив, что правая часть равенства является суммой моментов внешних и внутренних сил, получим:

$$\Delta m_{\mathrm{i}}\left[\vec{\mathcal{E}} r_{\mathrm{i}}{}^{2}-\vec{r_{\mathrm{i}}}\left(\vec{r_{\mathrm{i}}}\cdot\vec{\mathcal{E}}\right)\right]=\overrightarrow{M_{\mathrm{i}}}+\overrightarrow{\mathrm{м}_{\mathrm{i}}},$$

где M_i - есть момент всех внешних сил, а $\mathrm{м}_i$ - момент всех внутренних сил, действующих на i-ую точку.

Так как $\vec{r_{\mathrm{i}}}\perp\vec{\mathcal{E}}$, то $\vec{r_{\mathrm{i}}}\cdot\vec{\mathcal{E}}=0$, тогда $\Delta m_i\, r_i{}^2\vec{\mathcal{E}}=\overrightarrow{M_{\mathrm{i}}}+\overrightarrow{\mathrm{м}_{\mathrm{i}}}$.

Для твердого тела нужно просуммировать все равенства, написанные для всех его точек. При этом сумма моментов всех внутренних сил обратится в нуль, так как внутренние силы возникают попарно, каждая пара их имеет равные радиус-векторы, но направлены силы противоположно.

Вынеся угловое ускорение за знак суммы, как одинаковое для всех частей тела, получим:

$$\vec{\mathcal{E}}\sum J_{\mathrm{i}}=\sum\overrightarrow{M_{\mathrm{i}}}\ \text{ или }\ \vec{\mathcal{E}}J=\vec{M},$$

где J – момент инерции тела относительно оси, а M – результирующий момент внешних сил относительно оси.

Окончательно можно написать:

$$\vec{\mathcal{E}}=\frac{\vec{M}}{J}.$$

Мы получили так называемый **основной закон вращательного движения твердого тела**. При его выводе мы использовали второй закон Ньютона и ввели две новые величины – момент силы и момент инерции. Поэтому полученный закон является тоже вторым законом Ньютона или вторым законом динамики, но только для вращательного движения. Его форма записи аналогична тому же закону для материальной точки. Отсюда можно сделать весьма существенный вывод: мерой механического воздействия при вращении является момент силы, а мерой инертности – момент инерции.

3.9. Пара сил

Определение. *Парой сил* называется система двух равных по величине антипараллельных сил (рис. 3.16).

Пару сил нельзя уравновесить или заменить одной силой. Поэтому пара сил является особой мерой механического взаимодействия, отличной от силы. Если сила является мерой такого механического взаимодействия, в результате которого точка или тело получает линейное ускорение, то пара сил является мерой такого механического взаимодействия, в результате которого тело получает угловое

ускорение. Поэтому пару сил не следует представлять себе, как просто две силы.

Сила и пара сил являются совершенно разными физическими величинами, характеризующими различные по характеру механические взаимодействия. А поэтому свойства пары будут отличаться от свойств силы.

Пара сил, приложенная к телу, вызывает его вращение, но не изменяет его поступательного движения. Действительно проекция сил пары на любую координатную ось всегда равную нулю, а поэтому и проекции ускорения, вызываемого силами пары, будут равны нулю.

Вращательное действие пары сил характеризуются её *моментом*. Под моментом понимают величину, равную произведению модуля одной из сил пары на кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары. Это расстояние называется *плечом пары*. На рис. 3.16 плечом пары является h.

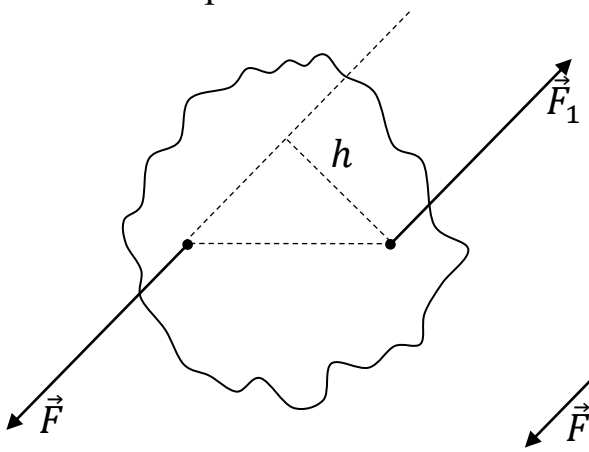


Рис. 3.16

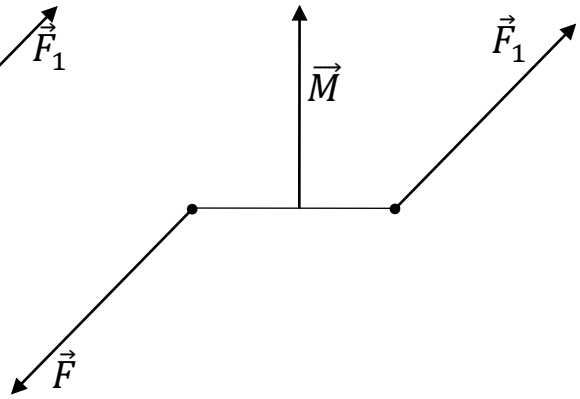


Рис. 3.17

Моментом пары есть векторная величина. Вектор момента пары должен характеризовать:

1) величину момента пары;

2) плоскость её действия;

3) направление поворота в этой плоскости.

Условились вектор момента пары направлять перпендикулярно плоскости пары в ту сторону, откуда поворот пары виден происходящим против хода часовой стрелки. Его величина равна произведению одной из сил пары на ее плечо (рис. 3.17).

Действие пары на абсолютно твердое тело не изменится, если ее переносить в пределах тела куда угодно в плоскости ее действия и даже переносить в параллельные плоскости, так как при этом ее момент останется прежним. В связи с этим вектор момента пары можно прикладывать в любой точке тела (такой вектор называется свободным), в отличие от вектора силы, который имеет определенную точку приложенную.

Если на тело действует несколько пар, то результирующий момент находиться путем векторного сложения их моментов.

Между моментом силы и моментом пары сил есть определенная связь.

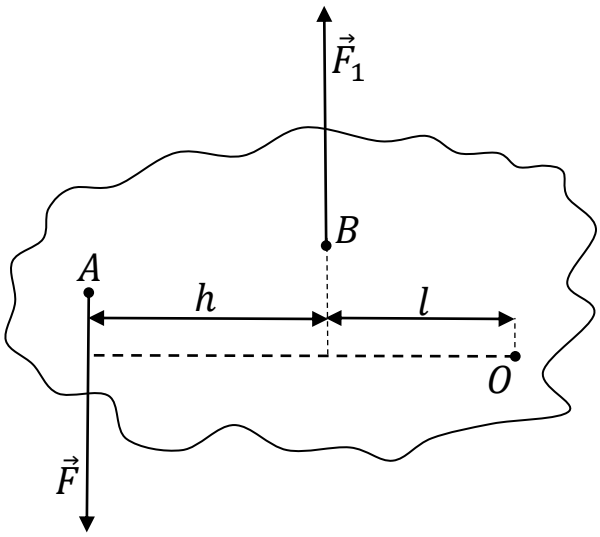


Рис. 3.18

Докажем это. Пусть на твердое тело действует пара сил $\vec{F}$, $\vec{F}_1$, имеющая плечо h. Выберем произвольно точку O лежащую в плоскости действия пары (рис. 3.18) и подсчитаем алгебраическую сумму моментов сил $\vec{F}$ и $\vec{F}_1$: $F(h+l) - F_1 l = Fh$.

Полученный результат является моментом пары. Следовательно, алгебраическая сумма моментов сил пары относительно любого центра, лежащего в плоскости ее действия, не зависит от выбора этого центра и равна моменту пары.

3.10. Перенос точек приложения сил

Как известно, действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если точку приложения этой силы перенести вдоль линии ее

действия (конечно, в пределах этого тела). Это легко доказать. Пусть на тело в точке A действует сила $\vec{F}_1$. В точке B, расположенной на ее линии действия, проложим две силы $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, направленные по прямой AB в противоположные стороны, причем $F_2 = F_3 = F_1$ (рис. 3.19). Так как равнодействующая сил $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ равна нулю, то их действие не будет влиять на движение тела. Однако эту систему трех сил можно представить себе как силу $\vec{F}_2$ и равнодействующую сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$. Последняя равна нулю. Следовательно, движение тела под действием силы $\vec{F}_2$ будет таким же, как и под действием силы $\vec{F}_1$. Поэтому точку приложения силы можно переносить вдоль линии ее действия.

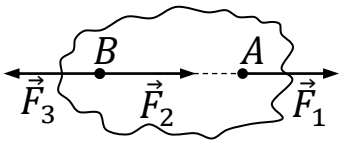


Рис. 3.19

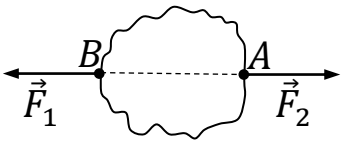


Рис. 3.20

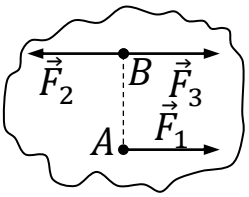


Рис. 3.21

Однако это будет справедливо только в случае абсолютно твердого тела. Если тело упруго, то перенос точки приложения силы приведет к изменению ее действия на тело. Поясним это следующим примером. Пусть на упругое тело действуют силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 3.20). Под действием этих сил тело претерпевает деформацию растяжения. Если силу $\vec{F}_2$ перенести в точку B, то тело деформироваться не будет, так как силы окажутся приложенными в одной точке. Если же силу $\vec{F}_1$ перенести в точку A, то возникает деформация сжатия.

Можно ли силы переносить параллельно?

Пусть на абсолютно твердое тело в точке A действует сила $\vec{F}_1$ (рис. 3.21). Движение тела не изменится, если в произвольной точке B приложить две равные и противоположно направленные силы $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, линия действия которых параллельна линии действия силы $\vec{F}_1$, причем $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3$. Полученную систему сил можно рассматривать как силу $\vec{F}_3$, равную $\vec{F}_1$ и параллельную ей, и пару сил $\vec{F}_1\vec{F}_2$. Таким образом, в абсолютно твердом теле силу можно переносить параллельно самой себе в любую другую точку, прибавив при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно новой точки приложения.

3.11. Закон сохранения импульса

Для материальной точки закон сохранения импульса является очевидным следствием второго закона Ньютона. *Если на материальную точку не действуют силы или действуют силы, равнодействующая которых равна нулю, то скорость ее, а значит и импульс остаются постоянными.*

Рассмотрим изолированную (замкнутую) систему точек.

Определение. *Изолированной* или *замкнутой системой материальных точек* называется такая система, на которую не действуют внешние силы или действуют такие внешние силы, результирующая которых равна нулю $\sum \vec{F_i} = 0$.

Если $\sum \vec{F_i} = 0$, тогда из второго закона Ньютона в общем виде $\frac{d}{dt}\sum \Delta m_i \vec{v}_i = \sum \vec{F_i}$, имеем $\frac{d}{dt}\sum \Delta m_i \vec{v}_i = 0$ или $\sum \Delta m_i \vec{v}_i = \overrightarrow{const}$.

Следовательно, *в замкнутой системе материальных точек общий импульс системы остается постоянным, а центр масс этой системы либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно.*

Закон сохранения импульса является одним из важнейших законов физики. Он является следствием второго и третьего законов Ньютона.

Из закона сохранения импульса следует, что внутренние силы, действующие в системе, не могут изменить общего импульса системы, а лишь позволяют отдельным материальным точкам системы обмениваться импульсом.

При применении закона сохранения импульса на Земле необходимо принимать во внимание, что на все тела на Земле действует притяжение Земли. Поэтому ни одна система тел на Земле не является замкнутой, если в эту систему не включена Земля. Однако, система, не замкнутая вообще, может вести себя в каком-либо направлении как замкнутая. Действительно, уравнение $\frac{d}{dt}\sum \Delta m_i \vec{v}_i = \sum \vec{F_i}$, являющееся векторным, можно заменить тремя уравнениями для суммы проекций импульса по координатным осям. Если внешние силы таковы, что сумма их проекций по каким-либо осям (например оси OX) равна ну-

лю, то для этого направления имеем $\frac{d}{dt}\sum \Delta m_i \vec{v}_{xi} = 0$ или $\sum \Delta m_i \vec{v}_{xi} = \overrightarrow{const}$.

На основании сказанного можно заключить, что составляющая общего импульса системы в направлении, в котором не действуют внешние силы, есть величина постоянная. То есть можно, исходя из закона независимости действия сил, рассматривать движение вдоль оси OX так как, если бы движения в направлении двух других осей не происходило.

Закон сохранения импульса может быть применен и к системе твердых тел при этом рассматривается движение центров масс.

3.12. Закон сохранения момента количества движения

Определение. *Моментом количества движения* или *моментом импульса* точки называют величину $\vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$ (или $\vec{p} = [\vec{r}, m\vec{v}]$), где $\times$ или [_,_] обозначают векторное произведение.

Импульсом момента силы называют величину $\vec{M}\Delta t$.

Момент количества движения точки можно выразить и через её момент инерции:

$$\vec{p} = [\vec{r}, m\vec{v}] = m[\vec{r}, \vec{v}] = m\left[\vec{r}, [\vec{\omega}, \vec{r}]\right] = m\vec{\omega}r^2 = J\vec{\omega}.$$

Момент количества движения тела складывается из моментов количества движения его частей (точек).

Вернёмся ко второму закону Ньютона для вращательного движения и придадим ему другую форму:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\vec{M}}{J}, Jd\vec{\omega} = \vec{M}dt \text{ или } d(J\vec{\omega}) = \vec{M}dt.$$

Мы получили, что изменение момента количества движения равно импульсу момента силы.

Если механическая система изолирована, то внешние силы на неё не действуют, а поэтому $\vec{M} = 0$. Тогда $J\vec{\omega} = \overrightarrow{const}$, т.е. *в изолированной механической системе момент количества движения сохраняется.*

Если мы каким-либо образом уменьшим момент инерции системы, то её угловая скорость возрастает, и, наоборот, при увеличении

момента инерции системы её угловая скорость уменьшается. В этом и заключается закон сохранения момента количества движения.

Приведём ряд примеров на закон сохранения момента количества движения.

1) Фигурист на коньках для сообщения своему телу вращения при начальном толчке несколько отставляет в сторону одну ногу. Это необходимо для получения достаточно большого вращающего момента. Затем он приближает руки и ноги к оси вращения. При этом его момент инерции уменьшается и возрастает угловая скорость вращения. Перед остановкой он разводит руки и ноги, в результате чего его угловая скорость уменьшается. Торможение вращения отведённой в сторону ногой производить удобнее, так как вращающий момент тормозящей силы при этом становится больше.

2) Аналогично поступает акробат, делающий сальто. Слегка наклонившись вперёд, по большей части с поднятыми руками, он, отталкиваясь от трамплина, сообщает себе вращательное движение вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр массы. Это вращение вызывается моментом силы нормального давления. В воздухе он прижимает руки и колени к своему телу, уменьшая таким способом момент инерции, и заметно увеличивает свою угловую скорость. В результате этого он за время полёта успевает совершить один, два или даже три полных оборота. Затем в нужный момент времени он снова увеличивает свой момент инерции, выпрямляя тело, и приземляется с малой угловой скоростью.

3) Рассмотрим процесс раскачивания качелей. Когда доска находится в крайнем положении, человек приседает. Угловая скорость качелей в этот момент времени равна нулю и приседание на её величину влиять не будет. При прохождении через вертикаль человек быстро выпрямляется. Тогда его центр массы приближается к оси вращения, момент инерции уменьшается, и угловая скорость качелей возрастает.

4) Примером учёта закона сохранения момента количества движения в технике являются особенности конструкции вертолёта. До начала вращения несущего винта система винт – корпус имеет момент количества движения, равный нулю. Когда же несущий винт приводится во вращение, корпус вертолёта начинает вращаться в противоположную сторону. Для устранения вращения корпуса на хвосте

вертолёта ставят вращающийся в вертикальной плоскости рулевой винт, который помимо функции управления создаёт тяговое усилие, направленное в сторону, противоположную той, куда несущий винт разворачивает корпус.

Законом сохранения момента количества движения объясняется и возникновение подъемной силы крыла самолёта.

3.13. Задачи

Методические указания (более подробно в п. 1.7): Если в кинематической задаче при раскрытии физического смысла указывается, в какой системе отсчета, какой материальный объект движется с названием вида движения последнего, то в динамической задаче помимо механического движения рассматривается механическое взаимодействие и дополнительно выясняется, является ли выбранная система отсчета инерциальной или неинерциальной, а также под действием каких сил или моментов сил происходит движение абсолютно твердого тела (равновесие тела в выбранной системе отсчета можно считать частным случаем движения, когда у тела нет ускорения); то есть главное внимание в этих задачах уделяется силам (со стороны каких тел они действуют, как направлены, где они приложены и что является плечами сил; для сил инерции нет тел, со стороны которых они действуют).

Чертеж динамической задачи помимо некоторых элементов чертежа кинематической задачи включает в себя изображение движущегося тела и действующих на него сил (с соблюдением масштаба), а также – плеч сил (при вращательном движении или в задаче на равновесие тела). Оси координат лучше выбирать так, чтобы левая часть основного закона динамики поступательного (вращательного) движения тела в проекции на ось координат равнялась её модулю с положительным знаком (одну из осей координат для этого направляют по вектору линейного или углового ускорения). При решении задач на равновесие тела (в ИСО и в НИСО) декартовы оси координат, используемые для проектирования равенств $\vec{0} = \sum \vec{F}$ и $\vec{0} = \sum \vec{M}$, выбираются, как всегда, произвольно, но для рационального решения задачи при проектировании равенства $\vec{0} = \sum \vec{F}$ оси координат берутся по возможности либо параллельно, либо перпендикулярно линиям дей-

ствия сил, а для проектирования равенства $\vec{0} = \sum \vec{M}$ оси координат проводятся в направлении, перпендикулярном плоскости действия сил через точку приложения какой-то (каких-то) силы.

Если оси координат в задаче используются только для проектирования векторов (векторных равенств), а не для определения координат, то начало координат, точку O, положение плоскости Q можно не указывать; а система координат для каждого тела (если их несколько) может быть выбрана своя; также в таких задачах нет надобности говорить о начальном моменте времени.

3.13.1. Примеры решения задач

3.1. Космический корабль совершает мягкую посадку на Землю, двигаясь замедленно в вертикальном направлении с постоянным ускорением 8,4 м/с^2. Сколько весит космонавт массой 70 кг, находящийся в этом корабле?

СИ

$a = 8{,}4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

$m = 70\text{кг}$

$P - ?$

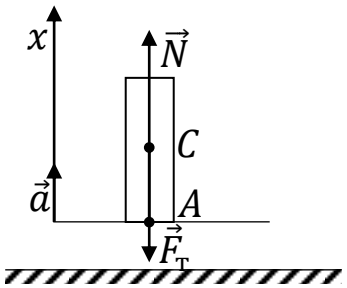


Рис. 3.22

Первый способ решения задачи: В инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, рассматривается поступательное прямолинейное с ускорением $\vec{a}$ движение космонавта. На космонавта действуют силы: сила тяжести $\vec{F}_T$ со стороны Земли, направленная вертикально вниз и приложенная в центре масс космонавта, сила нормальной реакции $\vec{N}$ со стороны опоры (пол кабины корабля), направленная вертикально вверх и приложенная к космонавту в точке соприкосновения космонавта с полом кабины корабля.

На рис. 3.22 изображено: тело отсчета – Земля штриховкой, космонавт – прямоугольником (между полом кабины корабля и изображением космонавта оставлен промежуток для того, чтобы не путать точки приложения сил), пол кабины корабля, точка C – центр масс космонавта, точка A – точка космонавта, соприкасающаяся с полом кабины корабля (точки C и A являются точками приложения сил $\vec{F}_T$ и $\vec{N}$), ось координат X, направленная по вектору ускорения $\vec{a}$ корабля.

$P = N$ (1) $\qquad ma = -F_T + N$ (2) $\qquad F_T = mg$ (3)

В системе уравнений равенство (1) следует из третьего закона Ньютона, в нем P – модуль веса космонавта (силы, действующей со стороны космонавта на горизонтальную опору – пол корабля), N – модуль силы $\vec{N}$; уравнение (2) – это уравнение движения космонавта (формула второго закона Ньютона) в проекции на ось координат X, формула (3) выражает второй закон Ньютона для силы тяжести, где F_T – модуль $\vec{F}_T$, m – масса космонавта, g – модуль ускорения силы тяжести.

$$P = m(g + a),\ P = 70 \text{ кг } (9{,}8 \text{ м/с}^2 + 8{,}4 \text{ м/с}^2) = 1{,}3 \cdot 10^2 \text{ Н}$$

Второй способ решения задачи: В неинерциальной системе отсчета, связанной с космическим кораблем, рассматривается равновесие космонавта. На космонавта, помимо указанных в первом способе решения задачи, действует сила инерции $\vec{F}_{ин}$, направленная против вектора $\vec{a}$ и приложенная в центре масс космонавта.

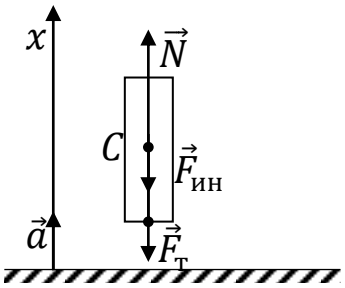


Рис. 3.23

На рис. 3.23 элементом является изображение силы $\vec{F}_{ин}$; не изображена Земля.

$P = N$ (1), $\qquad F_{ин} = ma$ (3),

$0 = -F_T - F_{ин} + N$ (2), $\qquad F_T = mg$ (4)

В системе уравнений уравнение (2) выражает одно из условий равновесия тела в проекции на ось координат X, формула (3) дает значение модуля силы инерции, действующей в поступательно прямолинейно движущейся неинерциальной системе отсчета.

$$P = m(g + a),\ P = 1{,}3\cdot 10^2\ \text{Н}$$

3.2. Для тренировок космонавтов используется центрифуга, частями которой являются кресло для космонавта и вращающаяся в горизонтальной плоскости штанга, к концу которой шарнирно крепится кресло. С какой силой давит космонавт массой 80 кг на кресло, если длина штанги 4,2 м, а частота ее вращения 30 об/мин?

СИ

$m = 80$кг

$l = 4{,}2$м

$\nu = 30\,\frac{\text{об}}{\text{с}}$

$F - ?$

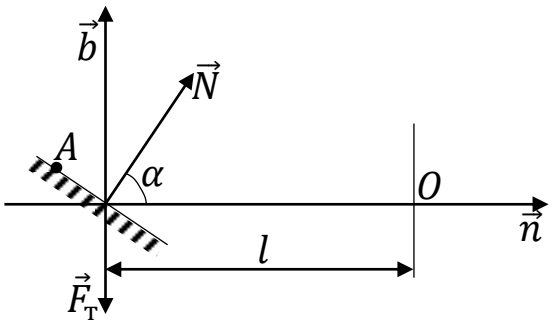


Рис. 3.24

Первый способ решения задачи: В инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, рассматривается равномерное движение по окружности радиусом l космонавта – материальной точки (без замены на материальную точку космонавт будет совершать вращательное движение, а для вращательного движения основной закон динамики будет иметь другой вид, отличный от закона для материальной точки и поступательно движущегося твердого тела) под действием сил: силы тяжести $\vec{F}_T$, действующей со стороны Земли вертикально вниз, силы нормальной реакции опоры (кресла) $\vec{N}$, действующей со стороны кресла в направлении перпендикулярном к этой опоре.

На рис. 3.24 изображено: штанга центрифуги отрезком длиной l, кресло космонавта штриховкой на конце штанги, точка O – центр окружности, описываемой точкой A – положением космонавта на кресле, силы $\vec{F}_T$ и $\vec{N}$, угол α, который образован направлением силы $\vec{N}$ и горизонтально расположенной штангой, естественные оси координат n и b, направленные по нормали и бинормали к траектории –

окружности в точке A, описываемой материальной точкой (космонавтом).

$F = N$ (1), $F_T = mg$, $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$

$ma_n = Ncos\alpha$ (2), $a_n = \omega^2 l$ (4),

$0 = -F_T + Nsin\alpha$ (3), $\omega = 2\pi\nu$,

В системе уравнений формула (1) следует из третьего закона Ньютона, в ней F – модуль искомой силы (она на чертеже не изображена), с которой космонавт действует на кресло, уравнения (2) и (3) – это уравнения движения материальной точки (космонавта) в проекции на естественные оси координат n и b соответственно, формула (4) – это формула модуля нормального ускорения (это проекция полного ускорения космонавта на естественную ось координат n) космонавта. Искомая векторная величина $\vec{F}$задается не только ее модулем F, но и направлением, которое будет давать, например, угол α (для нахождения его используется последняя формула системы уравнений).

$$F = \frac{mg}{sin\,\alpha},$$

$$\alpha = arctg\frac{g}{4\pi^2\omega^2 l}$$

$$F = \frac{80\ \ кг \cdot 9,8\ \ м/с^2}{0,24} = 3,3 \cdot 10^3\ \ Н$$

$$\alpha = arctg\frac{9,8\ \ м/с^2}{4 \cdot 3,14^2 \cdot (5,0 \cdot 10^{-1}\ \ с^{-1})^2 4,2\ \ м} = 14^0.$$

Второй способ решения задачи: В неинерциальной системе отсчета, связанной с креслом космонавта, рассматривается равновесие космонавта. На космонавта, помимо сил, указанных в первом способе решения задачи, действует центробежная сила инерции $\vec{F}_{ц.б.ин}$, направленная по радиус-вектору $\vec{r}$ космонавта.

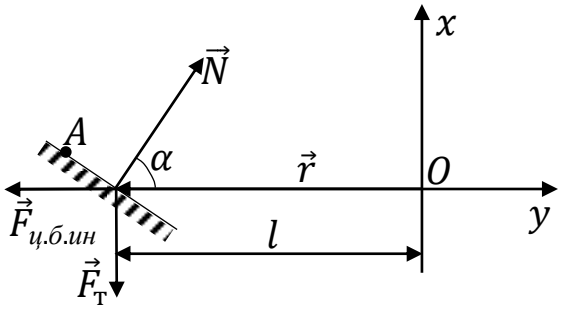


Рис. 3.25

На рис. 3.25 элементом является изображение силы $\vec{F}_{ц.б.ин}$, вместо естественной системы координат изображена декартова система координат *XOY* и радиус-вектору $\vec{r}$ космонавта.

$F = N$ (1), $F_{ц.б.ин} = m\omega^2 r$,

$0 = -F_T + N\sin\alpha$ (2), $r = l$

$0 = -F_{ц.б.ин} + N\cos\alpha$ (3), $\omega = 2\pi\nu$,

$F_T = mg$, $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

В системе уравнений уравнения (1) и (2) выражают условия равновесия космонавта в проекции на оси координат OX и OY.

Решение этой системы уравнений дает такие ответы: $F = 3{,}3 \cdot 10^3$ Н, $\alpha = 14^0$.

3.3. Через вращающийся вокруг неподвижной, направленной горизонтально, оси блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы массами 0,55 кг и 1,61 кг. Найти показания динамометра, к пружине которого прикреплён блок, при движении грузов. Масса блока 350 г. Трением в блоке пренебречь. Блок считать однородным диском.

СИ

$m = 350г = 0{,}350кг$

$m_1 = 0{,}55кг$

$m_2 = 1{,}61кг$

$F - ?$

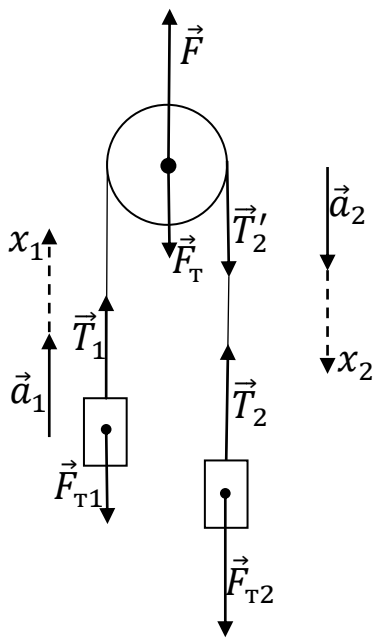


Рис. 3.26

В инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, рассматривается поступательное прямолинейное движение по вертикали двух грузов и вращательное движение блока вокруг неподвижной оси; все движения происходят с ускорениями: грузов – с ускорениями $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, направленными вертикально, блока – с ускорением $\vec{\varepsilon}$, направленным по оси вращения блока за чертеж (известно, что при вращении вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения изображается на оси вращения и направлен в сторону угловой скорости при ее увеличении и в противоположную – при уменьшении модуля угловой скорости; вектор угловой скорости также в этом случае изображается на оси вращения и его направление определяется правилом правого винта). На грузы действуют силы: $\vec{F}_{T1}$ и $\vec{F}_{T2}$ – силы тяжести со стороны Земли, направленные вертикально вниз и приложенные в центре масс грузов, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы натяжения нити, действующие со стороны нити, направленные вдоль нити вертикально вверх и приложенные в точках крепления нити к грузам. На блок действуют силы: $\vec{F}_T$ – сила тяжести со стороны Земли, направленная вертикально вниз и приложенная в центре масс блока (в точке *O*), сила упругости пружины динамометра $\vec{F}$ со стороны пружины, направленная вдоль пружины вертикально вверх и приложенная в месте крепления пружины к валу блока (в точке *O*), силы $\vec{T}_1{}'$ и $\vec{T}_2{}'$ – силы натяжения нити со стороны нити, направленные вдоль нити вертикально вниз и приложенные в точках отделения нити от поверхности блока (точки *A* и *B* находятся на одном уровне с точкой *O*).

На рис. 3.26 изображено: блок окружностью радиусом *r*, грузы – прямоугольниками, рассмотренные выше силы, ускорения грузов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ направленные вдоль них оси координат X_1 и X_2; ось координат *Y* взята по вектору $\vec{\varepsilon}$ и на чертеже изображена геометрической точкой.

$0 = F - mg - T_1' - T_2'$ (1),

$m_1a_1 = T_1 - m_1g$ (2),

$m_2a_2 = -T_2 + m_2g$ (3),

$I_Y = M_{1Y} + M_{2Y} + M_{TY} + M_{FY}$ (4),

$I_Y = 0{,}5mr^2$,	$M_{2Y} = M_2$,	$a_1 = a_2 = a$ (5),
$\varepsilon_Y = \varepsilon$,	$M_2 = T_2'r$,	$a_\tau = \varepsilon_r$ (6),
$M_{1Y} = -M_1$,	$M_{TY} = 0$,	$a_\tau = a$ (7),
$M_1 = T_1'r$,	$M_{FY} = 0$,	$T_1 = T_1'$ (8),

$$T_2 = T_2^{'} \quad (9).$$

В системе уравнений формула (1), записанная в проекции на вертикально направленную вверх ось координат, следует из того, что центр масс блока, находящийся на оси его вращения, неподвижен в системе отсчета, связанной с Землей. Уравнения (2), (3), (4) – это уравнения движения грузов и блока, записанные в проекции на оси координат, соответственно X_1 X_2 Y. В уравнении (4) I_Y – момент инерции блока относительно оси вращения, ε_Y – проекция углового ускорения блока на ось Y, равная его модулю со знаком плюс, M_{1Y}, M_{2Y} – проекции моментов сил $\vec{T}_1^{\,'}$, $\vec{T}_2^{\,'}$ на ось Y, равные модулям этих моментов (так как моменты этих сил, лежащих в плоскости чертежа, перпендикулярны плоскости чертежа; но момент силы $\vec{T}_1^{\,'}$ направлен против оси Y, а момент силы $\vec{T}_2^{\,'}$ – по оси Y, что отражено в знаках проекции моментов (-, +), а модули моментов сил $\vec{T}_1^{\,'}$, $\vec{T}_2^{\,'}$ равны произведениям модуля силы на ее плечо (плечами обеих сил является r), у сил $\vec{F}_T$ и $\vec{F}$ относительно оси Y плечи равны нулю (поэтому проекции их моментов на ось Y тоже равны нулю). Формула (5) следует из нерастяжимости нити, (8) – из невесомости нити; формула (6) связывает модуль углового ускорения блока с модулем тангенциального ускорения точек блока, находящихся на расстоянии r от оси вращения (то есть на его поверхности). Так как нить нерастяжима и не проскальзывает по поверхности блока, то можно написать формулу (7).

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)g + \frac{(m_2 - m_1)(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + 0{,}5m}$$

$$F = (0{,}55\ \text{кг}_1 + 1{,}61\ \text{кг} + 0{,}350\ \text{кг}) \cdot 9.8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} + \frac{(1{,}61\ \text{кг} - 0{,}55\ \text{кг})(0{,}55\ \text{кг} - 1{,}61\ \text{кг}) \cdot 9{,}8\ \text{м/с}^2}{0{,}55\ \text{кг} + 1{,}61\ \text{кг} + 0{,}5 \cdot 0{,}350\ \text{кг}} = 21\ \text{Н}$$

3.4. Пластинке дают наклон и помещают на нее шар радиусом 2,5 см. При каком угле наклона шар будет скатываться без скольжения, если коэффициент максимального трения покоя равен 0,25, а коэффициент трения качения равен 0,11 см?

СГС

$r = 2{,}5$см

$\mu = 0{,}25$

$K_k = 0{,}11$см

$\alpha - ?$

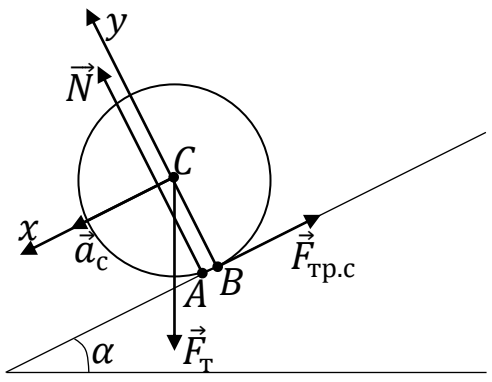


Рис. 3.27

В инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, рассматривается качение шара по наклонной плоскости с углом наклона α. Качение шара рассматриваем состоящим из двух движений: поступательного со скоростью центра масс шара и вращательного вокруг оси, проходящей через центр масс; оба движения происходят с ускорениями. На шар действуют силы: со стороны Земли сила тяжести $\vec{F}_T$, приложенная в центре масс шара (в точке C) и направленная вертикально вниз, со стороны пластинки – сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$, приложенная в точке A поверхности шара, расположенной на поверхности шара так, что линия действия силы $\vec{N}$ проходит немного впереди центра масс шара (за счет этого и возникает момент пары сил, являющийся моментом сил трения качения; если при качении трение качения не учитывается, то линия действия силы $\vec{N}$ должна проходить через центр масс шара – катящегося тела), со стороны пластинки действует сила трения покоя $\vec{F}_{тр.о}$, приложенная в точке B шара (точки B и C находятся на одной нормали к пластинке) точка касания шара и пластинки (между шаром и пластинкой на чертеже сделан промежуток с тем, чтобы показать к какому телу приложена та или иная сила) и направленная вдоль наклонной пластины в противоположную скатыванию шара сторону.

На рис. 3.27 изображено: пластинка под углом α к горизонту, шар окружностью радиусом r, названные выше силы, ускорение центра масс шара $\vec{a}_c$, оси координат X, Y, Z, проходящие через точку C, ось Z направлена за чертеж.

$ma_c = F_{TX} + F_{тр.о\,X} + N_X$ (1),

$0 = F_{TY} + F_{тр.о\,Y} + N_Y$ (2),

$I_Z\varepsilon_Z = M_{кZ} + M_{0Z}$ (3),

$F_{тр.о} = \mu N$ (4),

$M_к = K_k N$ (5),

$M_{0Z} = -F_{тр.о}\, r$ (6),

$F_{TX} = mg \sin \alpha$, $F_{тр.о\,Y} = 0$, $a_c = \varepsilon r$ (8),
$F_{тр.о\,X} = -\mu mg \cos \alpha$, $N_Y = N$, $\varepsilon_Z = -\varepsilon$ (9),
$N_X = 0$, $N = F_T \cos \alpha$, $M_{кZ} = K_k\, mg \cos \alpha$,
$F_{TY} = -mg \cos \alpha$, $F_T = mg$. $M_{0Z} = -\mu mg \cos \alpha\, r$
$I_Z = 0{,}4mr^2$ (7),

В системе уравнений уравнения (1), (2), (3) являются уравнениями поступательного и вращательного движения шара в проекции на соответствующие декартовы оси координат, в них a_{cx} – проекция $\vec{a}_c$, F_{TX} – проекция $\vec{F}_T$, $F_{тр.оX}$ – проекция $\vec{F}_{тр.о}$, N_X – проекция $\vec{N}$ на ось координат X, F_{TY}, $F_{тр.оY}$, N_Y – проекции этих сил на ось координат Y, I_Z – момент инерции шара относительно оси Z, ε_Z – проекция $\vec{\varepsilon}$ на ось Z, $M_{кZ}$ – проекция момента сил трения качения, M_{0Z} – проекция момента сил трения покоя (эти моменты перпендикулярны плоскости чертежа и направлены: первый – за чертеж, второй – от чертежа) на ось Z, формулы (4), (5), выражают закон Амонтона-Кулона для силы трения и для момента силы трения качения; и формула (6) – для проекции на ось Z момента силы трения покоя. Формула (7) записана для момента инерции шара относительно оси Z, формула (8) связывает модуль линейного ускорения центра масс шара в его поступательном движении с модулем углового ускорения шара при его вращении вокруг оси, проходящей через центр масс при отсутствии скольжения при качении (эта формула будет справедлива для любого меньшего угла наклона, который является ответом записанной системы уравнений, выражающим максимальное значение искомого угла; есть и второе основание называть определяемый угол наклона максимальным, а, именно, значение силы трения покоя, используемое в решении системы уравнений является максимальным, а оно будет максимальным только при максимальном угле наклона пластинки). В формуле (9) для проекции углового ускорения шара на ось координат Z в правой части формулы поставлен знак минус, так как вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен с вектором угловой скорости шара (модуль ее возрастает), а последний по правилу правого винта направлен против оси Z. Последние два равенства для проекций соответствующих моментов сил на ось Z записаны с учетом их направлений относительно оси Z, а также – формул (5), (6).

$$\alpha_{max} = arctg(3{,}5\mu - 2{,}5\frac{K_k}{r})$$

$$\alpha_{max} = arctg(3{,}5 \cdot 0{,}25 - 2{,}5\frac{0{,}11}{2{,}5}) = 38^0$$

$$\alpha \leq 38^\circ$$

3.5. Рабочий удерживает за один конец доску, масса которой 40 кг, так, что доска образует угол 30^0 с горизонтальным направлением. Какую силу прикладывает рабочий в случае, когда эта сила направлена перпендикулярно доске? Найти силу реакции опоры.

СИ

$m = 40$кг

$\alpha = 30°$

$F-?$

$R-?$

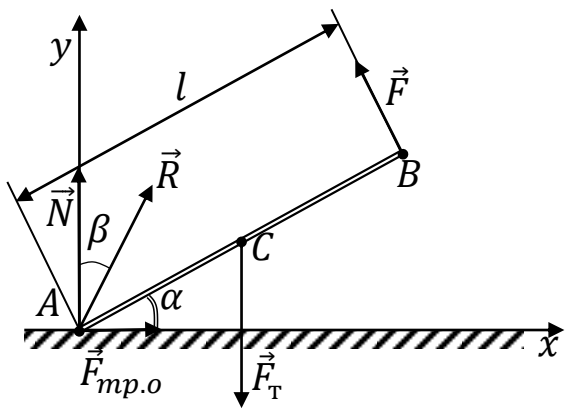


Рис. 3.28

В инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, рассматривается равновесие доски; на нее действуют сила тяжести $\vec{F}_T$ со стороны Земли вертикально вниз, приложенная в центр масс доски в точке *C*, сила $\vec{F}$ со стороны рабочего перпендикулярно длине доски, приложенная в точке *B*, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ со стороны опоры перпендикулярно горизонтально расположенной опоре, приложенная в точке *A*, сила трения покоя $\vec{F}_{тр.о}$ со стороны опоры вдоль опоры в направлении, противоположном движению, в которое конец доски *A* стремится прийти относительно опоры, приложенная к доске в точке *A*.

На рис. 3.28 изображена доска отрезком длиной *l*, опора – штриховкой, рассмотренные выше силы и геометрические точки, оси координат *X* (горизонтально вправо), *Y* (вертикально вверх). В решении будет использоваться третья координатная ось *Z*, проходящая через

точку A и направленная (как это следует в правой системе координат) перпендикулярно плоскости чертежа в направлении от чертежа, угол α, угол β между силой $\vec{R}$ (она является суммой двух сил $\vec{F}_{тр.о}$ и $\vec{N}$, то есть $\vec{R} = \vec{N}+\vec{F}_{тр.о}$) и вертикалью.

$0 = F_{тр.о} - F\sin\alpha$ (1),

$0 = -mg + N + F\cos\alpha$ (2),

$0 = Fl - mg\frac{l}{2}\cos\alpha$ (3),

$R = \sqrt{F_{тр.о}^2 + N^2}$ (4),

$\beta = arctg\left(\frac{F_{тр.о}}{N}\right)$ (5).

В системе уравнений уравнения (1), (2) выражают условия равновесия доски для сил в проекции на оси X и Y, соответственно, а для моментов сил – уравнение (3) – в проекции на ось Z; формулы (4) и (5) следуют из чертежа и определяют модуль силы $\vec{R}$ и угол, который искомая сила $\vec{R}$ образует с вертикалью.

$$F = \frac{mg\cos\alpha}{2},$$

$$R = \frac{mg}{2}\sqrt{\cos^2\alpha\sin^2\alpha + (-\cos^2\alpha + 2)^2},$$

$$\beta = arctg\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha + 2}.$$

$$F = \frac{40\ \ кг\cdot 9{,}8\ \ м/с^2\cdot 0{,}866}{2} = 1{,}7\cdot 10^2\ \ Н,$$

$$R = \frac{40\ \ кг\cdot 9{,}8\ \ м/с^2}{2}\sqrt{(0{,}866)^2\cdot(0{,}500)^2 + (-(0{,}866)^2 + 2)^2} = 2{,}6\cdot 10^2\ \ Н,$$

$$\beta = arctg\frac{0{,}866\cdot 0{,}500}{(0{,}866)^2 + 2} = 20^0.$$

Методические указания (более подробно в п. 1.7): По этой теме обычно предлагаются задачи, для решения которых используются законы сохранения импульса и момента импульса и теорема о движении центра масс системы материальных точек (тел), как часть решения кинематической или динамической задачи. Поэтому в физическом смысле задачи на первый план выносится рассмотрение взаимодействия тел (материальных точек), с тем чтобы какие-то тела объединить в систему, разделив тем самым силы на внешние и внутренние, а уже потом – движение тел системы. Существенной частью физического смысла задачи является определение замкнутости (полной или частичной) системы тел; если в системе тел нет ни одного тела, которое вращается или приходит во вращательное движение, то вы-

ясняют, чему равна сумма (векторная или в проекции на ось координат) внешних сил; если в системе тел имеет место вращательное движение, то выясняют равенство нулю суммы (векторной или в проекции на ось координат) момента внешних сил. При рассмотрении упомянутых сумм сил (моментов сил) важно не путать внешние силы с внутренними.

Главными элементами чертежа задачи по этой теме являются изображения скоростей (линейных, угловых) тел системы с указанием системы отсчета для каждой скорости; на чертеже изображаются тела (материальные точки) системы и ось (оси) координат, используемые для выяснения замкнутости системы тел и проектирования законов сохранения импульса (момента импульса).

3.6. На концах однородного стержня насажены два одинаковых шара. Стержень бросают, причем в начальный момент времени один из шаров имеет скорость 32 м/с под углом 60^0 к горизонту, а другой шар – 4,0 м/с в прямо противоположном направлении. На какую высоту над начальным уровнем поднимется середина стержня?

СИ

$m_1 = m_2 = m$

$v_1 = 32\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$

$\alpha = 60°$

$v_2 = 4{,}0\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$

$h - ?$

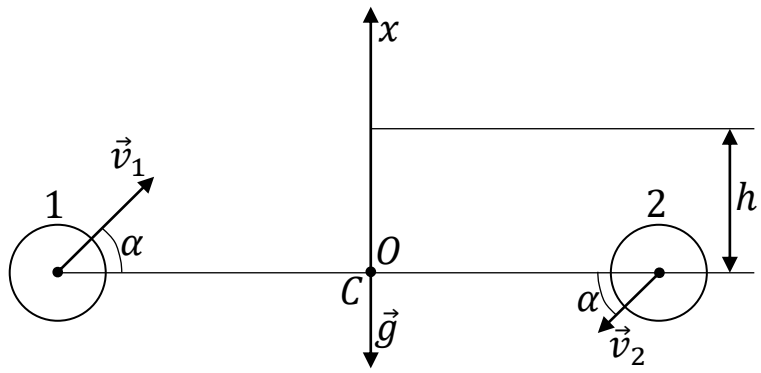


Рис. 3.29

В инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, рассматривается движение точки *C*, являющейся центром масс системы двух одинаковых по массе шаров 1 и 2 получивших в начальный момент времени скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ при броске с «подкручиванием» стержня вокруг оси, которая располагается ближе к шару 2. По теореме о движении центра масс системы тел (материальных точек) точка *C* будет двигаться по параболе с постоянным ускорением силы тяжести $\vec{g}$. Начальный момент времени – это момент броска шаров.

На рис. 3.29 изображены шары окружностями небольших радиусов, соединяющий их стержень отрезком прямой, скорости шаров $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ в начальный момент времени, точка C – центр масс системы, состоящей из двух шаров и однородного стержня, углы α, определяющие направления скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ относительно горизонтали, ось координат OX, начало координат – точка O – выбрана в начальном положении точки C, высота подъема центра масс h, вектор $\vec{g}$.

$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$ (1), $\qquad v_{0X} = \frac{m_1 v_{1X} + m_2 v_{2X}}{m_1 + m_2}$ (3)

$x = h$, $x_0 = 0$, $a_x = g$,

$\vec{v}_0 = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$ (2),

$v_{1X} = v_1 sin\alpha$,

$v_{2X} = v_2 sin\alpha$,

$v_X = v_{0X} + a_X\, t$ (4),

$v_X = 0$.

В системе уравнений кинематическое уравнение (1) дает зависимость координаты x материальной точки от времени ее движения t при движении с постоянным ускорением, в нем t – время подъема на максимальную высоту h, x, x_0 – конечная и начальная координаты точки C, v_{0X} – проекция начальной скорости $\vec{v}_0$ точки C на ось OX, a_X – проекция $\vec{g}$ на ось OX, равная модулю $\vec{g}$ со знаком минус. Формула (2) получена из формулы радиус-вектора центра масс системы материальных точек дифференцированием ее по времени, в ней m_1, m_2 – массы шаров, формула (3) получена проектированием формулы (2) на ось координат OX, в ней v_{1X}, v_{2X} – проекции начальных скоростей шаров на ось OX, формула (4) выражает закон изменения скорости материальной точки, движущейся с постоянным ускорением, в проекции на ось OX; так как в верхней точке траектории вертикальная составляющая скорости материальной точки на мгновение обращается в ноль, то t в формуле (4) будет являться временем подъема точки C на максимальную высоту.

$$h = \frac{(v_1 - v_2)^2 \sin^2\alpha}{8g},$$

$$h = \frac{(3,2\ \frac{м}{с} - 4.0\ \frac{м}{с})^2 \cdot (0,866)^2}{8 \cdot 9,8\ \frac{м}{с^2}} = 7,5\ \text{м}.$$

3.7. С корабля массой 750 т произведен выстрел из пушки в сторону его движения под углом 60^0 к горизонту. Насколько изменится за время выстрела скорость корабля, если снаряд массой 30 кг вылетел со скоростью 1,0 км/с относительно корабля?

СИ

$$m_1 = 750\text{т} = 7{,}5 \cdot 10^5\text{кг}$$
$$v_1 = 32\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$$
$$m_2 = 30\text{кг}$$
$$\alpha = 60°$$
$$v_2 = 1{,}0\,\frac{\text{км}}{\text{с}} = 1{,}0 \cdot 10^3\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$\Delta v_1 - ?$$

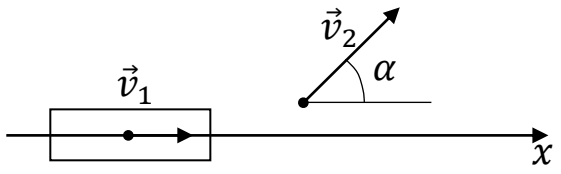


Рис. 3.30

В инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, будем рассматривать взаимодействие корабля и снаряда во время выстрела. Корабль и снаряд образуют систему тел, которая в горизонтальном направлении является частично замкнутой, так как сумма проекций внешних сил, действующих на эту систему тел (силы тяжести и выталкивающей силы) на горизонтальную ось координат, например ось *OX*, равна нулю.

На рис. 3.30 изображено: прямоугольником – корабль и точкой *A* – снаряд, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ – их скорости (корабля – относительно Земли, снаряда – относительно корабля) при выстреле, ось координат *X*.

$(m_1 + m_2)\upsilon_{1X} = m_1\,\upsilon'_{1X} + m_2\,\upsilon'_{2X}$(1) $\quad \upsilon_{2X} = \upsilon_2 cos\alpha$ (3),

$\upsilon_{1X} = \upsilon_1$, $\upsilon'_{1X} = \upsilon'_1$, $\quad \Delta\upsilon_1 = \upsilon'_1 - \upsilon_1$ (4)

$\upsilon'_{2X} = \upsilon_{1X} + \upsilon_{2X}$ (2),

В системе уравнений формула (1) выражает закон сохранения импульса в проекции на ось *OX* для частична замкнутой системы тел, в которой m_1, m_2 – массы корабля и снаряда, υ_{1X}, υ'_{1X} – проекции скорости корабля относительно Земли на ось *OX* до и после выстрела, υ'_{2X} – проекции скорости снаряда на ось координат *OX* во время выстрела, формула (2) записана на основании теоремы сложения скоростей, в ней υ_{2X} – проекции скорости снаряда относительно корабля на

ось *OX*, формула (3) следует из чертежа, а формула (4) дает значение искомой величины, υ_1, υ_2 – модули скоростей $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$, υ'_1 – модуль скорости корабля после выстрела.

$$\Delta\upsilon_1 = -\frac{m_2\upsilon_2 \cos\alpha}{m_1},$$

$$\Delta\upsilon_1 = -\frac{30\ \ кг \cdot 1{,}0 \cdot 10^3\ \ м/с \cdot 0{,}50}{7{,}50 \cdot 10^5\ \ кг} = -2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \ м/с$$

Знак минус в ответе свидетельствует о том, что скорость корабля при выстреле в указанном в задаче направлении уменьшается.

3.8. С круглой платформы карусели массой 300 кг и радиусом 3,1 м, вращающейся по инерции с частотой 0,15 $с^{-1}$, спрыгивает человек массой 85 кг со скоростью 5,2 м/с относительно платформы по касательной к ее краю. Определить частоту вращения платформы после прыжка; трением пренебречь, платформу считать однородным диском, человека – точечной массой.

СИ

$$m_1 = 300кг$$
$$r = 3{,}1м$$
$$m_2 = 85кг$$
$$\nu = 0{,}15с^{-1}$$
$$v = 5{,}2\,\frac{м}{с}$$

$\nu_1 - ?$

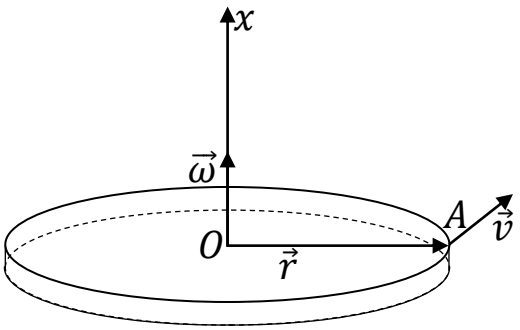


Рис. 3.31

В инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, будем рассматривать взаимодействие при прыжке человека и платформы, образующих систему тел; она частично замкнута относительно вертикально расположенной координатной оси *OX*, которую совмещаем с осью вращения платформы, так как сумма моментов внешних сил (силы тяжести и силы нормальной реакции опоры), действующих на человека и платформу относительно оси *OX* равна нулю (без учета сил трения, возникающего в подшипниках крепления вала вращения платформы; применение подшипников, а так же их смазка значительно уменьшают трение при вращении платформы).

На рис. 3.31 изображено: платформа в форме диска (в перспективе), точка *A* на ней, где находится человек перед прыжком, ось ко-

ординат OX, $\vec{\omega}$, $\vec{v}$ – векторы угловой скорости платформы относительно Земли до прыжка человека и линейной скорости человека относительно платформы при прыжке, $\vec{r}$ – радиус-вектор человека.

$(I_{1X}+ I_{2X})\ \omega_X = I_{1X}\,\omega_{1X} + I_{2X}\,\omega_{2X}$ (1),

$\omega_{2X} = \omega_X + \omega'_{rX}$ (2) $\quad \omega = 2\pi\nu$, $\quad \omega' = \frac{v}{r}$ (3)

$I_{1X} = 0{,}5mr^2$, $\quad \omega_{1X} = \omega_1$,

$I_{2X} = m_2r^2$, $\quad \omega_1 = 2\pi\nu_1$,

$\omega_X = \omega$, $\quad \omega'_{rX} = \omega'$,

В системе уравнений формула (1) выражает закон сохранения момента импульса рассматриваемой частично замкнутой системы тел в проекции на ось OX, в ней: I_{1X}, I_{2X} – моменты инерции платформы и человека относительно оси OX, ω_X, ω_{1X} – проекции угловой скорости платформы до и после прыжка с нее человека, ω_{2X}, ω'_{rX} – проекции угловой скорости радиус-вектора человека $\vec{r}$ относительно Земли и платформы, соответственно, формула (2) выражает теорему сложения угловых скоростей в проекции на ось OX, ω, ω_1, ω'- модули соответствующих угловых скоростей, формулы без номеров выражают значения моментов инерции платформы и человека относительно оси OX, а также – связывают модули угловых скоростей с частотой вращения платформы ν и ν_1 до и после прыжка человека, формула (3) связывает модуль угловой скорости $\vec{r}$ с линейной скоростью его конца.

3.13.2. Задачи для самостоятельного решения

3.9. Тело скользит вниз по наклонной плоскости, составляющей угол 30° с горизонтом. Коэффициент трения 0,2. Определить ускорение.

3.10. На горизонтальном столе лежит брусок массой 2 кг. К нему привязана нить, переброшенная через неподвижный блок, укрепленный на краю стола. К другому концу нити привязан груз массой 0,5 кг. Коэффициент трения бруска по столу 0,2. Определить ускорение грузов и силу натяжения нити.

3.11. К концам нити, перекинутой через неподвижный блок, подвешены два груза по 95 г каждый, на которые насажены два перегрузка – слева 7,5 г и справа 2,5 г. Какой путь пройдет левый груз за 2 с?

3.12. В вершине наклонной плоскости, составляющей угол 30° с горизонтом, укреплен неподвижный блок. Через блок перекинута нить, к одному концу которой прикреплен груз в 2 кг, а к другому – 0,5 кг. Больший груз лежит на наклонной плоскости. Коэффициент трения скольжения груза по наклонной плоскости 0,1. Определить ускорение грузов.

3.13. Определить ускорение, с которым движется груз массой m_1, в установке, изображенной на рис. 3.32. Трением и массами блоков и нити пренебречь, m_1 =2 кг, m_2 = 5 кг.

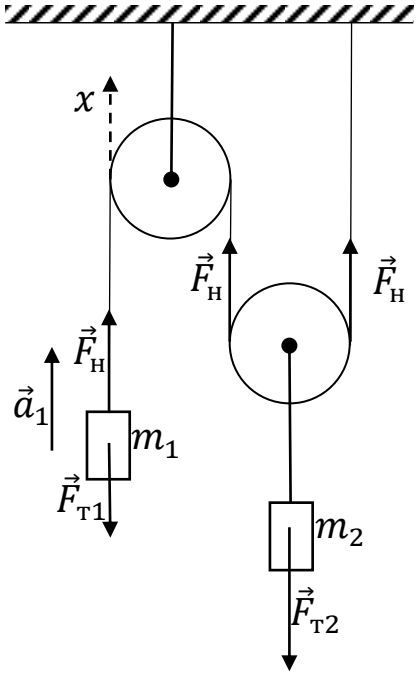


Рис. 3.32

3.14. Шофер выключил двигатель в тот момент, когда скорость автомобиля была $v_0 = 54\frac{км}{ч}$. Через время $\Delta t = 2с$ скорость автомобиля упала до $v = 18\frac{км}{ч}$. Чему был равен импульс автомобиля p_0 в момент выключения двигателя? Чему равно изменение импульса автомобиля Δp? Чему равен импульс силы сопротивления движению ав-

томобиля $F_{\text{сопр}}\Delta t$? Сила сопротивления движению в течение времени Δt была постоянна и составляет $F_{\text{сопр}} = 6\text{кН}$.

3.15. Три сцепленных вагона массами m, $2m$ и $3m$, где $m = 2\text{т}$, движущиеся со скоростью $v_1 = 1{,}8\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, столкнулись с неподвижным вагоном, после чего они все стали двигаться со скоростью $v = 0{,}9\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Чему равна масса неподвижного вагона m_0?

3.16. Снаряд, выпущенный вертикально вверх взорвался на максимальной высоте. При этом образовалось три осколка. Два осколка разлетелись под прямым углом друг к другу. Масса первого осколка m_1, его скорость v_1, масса второго осколка m_2, его скорость v_2. Чему равна скорость v_3 третьего осколка массой m_3?

3.17. Охотник стреляет из ружья с движущейся лодки в направлении ее движения. Какова скорость лодки v_0 до выстрела, если она остановилась после двух сделанных подряд выстрелов? Масса лодки $m_{\text{л}} = 120$ кг, масса охотника $m_{\text{о}} = 80$ кг, масса заряда $m_{\text{з}} = 25$ г, скорость вылета заряда из ружья $v = 600\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

3.18. Мяч массой $m = 100$ г, летевший со скоростью $v = 20\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, ударился о горизонтальную плоскость под углом $\alpha = 60°$ к нормали. Удар абсолютно упругий. Найти импульс силы $F\Delta t$ полученный мячом при ударе.

3.19. С судна движущегося со скоростью $v_1 = 54\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, произведен выстрел из пушки под углом $\alpha = 60°$ к горизонту в направлении противоположном движению судна. Снаряд вылетел со скоростью $u = 1\frac{\text{км}}{\text{с}}$. На сколько изменилась скорость судна, если масса снаряда $m_2 = 50$ кг, а масса судна $m_1 = 200$ т?

3.20. Лодка массой $m_1 = 100$ кг стоит неподвижно в стоячей воде. Мальчик массой $m_2 = 40$ кг переходит с кормы на нос лодки. На какое расстояние S при этом передвинется лодка, если ее длина $l = 2$ м? Сопротивлением воды пренебречь.

3.21. Тело массой m лежит на клине массой M с длинной наклонной плоскости l и высотой h. На какое расстояние S, переместится клин за время, в течение которого тело спустится с вершины клина к его основанию, двигаясь равноускорено? Трением пренебречь.

3.22. На гладкой горизонтальной поверхности лежит невесомый стержень длинной l с надетыми на его концы маленькими шариками массой m и $2m$. На шарик массой m налетает со скоростью v_0 материальная точка массой m_0 и прилипает к нему. С какой скоростью v_c станет двигаться центр масс C стержня, если вектор скорости материальной точки направлен под углом 90° к стержню (рис. 3.33).

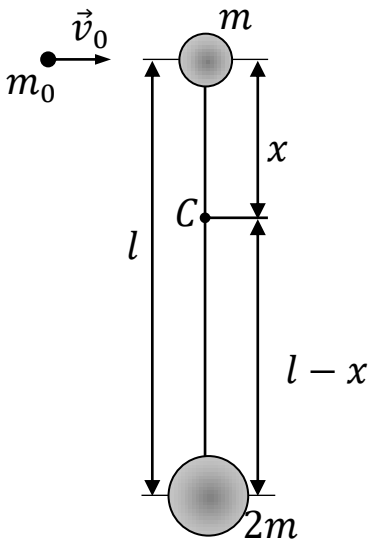


Рис. 3.33

3.23. Космонавт массой m соединен с космическим кораблем массой M тросом длинной l. Перебирая трос, он приближается к кораблю. На какое расстояние S_1 он переместится до сближения? На какое расстояние S_2 переместится при этом корабль.

3.24. Кузнечик сидит на конце соломинки длинной $l = 40$ см, которая лежит на гладком горизонтальном полу. С какой наименьшей скоростью $v_{0\,min}$ относительно пола он должен прыгнуть, чтобы попасть на другой конец соломинки? Масса кузнечика M вдвое больше

массы соломинки m. С какой скоростью v и в каком направлении станет двигаться при этом соломинка?

3.25. Материальная точка массой m движется равномерно по окружности радиусом R с частотой ν. Найти изменение импульса этой точки через четверть оборота Δp_1, половину оборота Δp_2, три четверти оборота Δp_3, полный оборот Δp_4.

3.26. Десять пуль массой по $m = 16$ г каждая, выпущенные из автомата, ударились о стальную преграду под углом $\alpha = 60°$ к нормали OX со скоростью $v = 600\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и срикошетировали от нее под тем же углом без потери скорости (рис. 3.34) Найти импульс силы $F\Delta t$, полученный преградой.

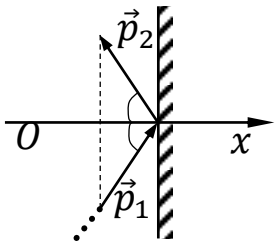


Рис. 3.34

3.27. Снаряд, летевший горизонтально со скоростью $v = 80\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, разорвался на высоте $h = 30$ м на два осколка (рис. 3.35) Один осколок упал через время $t = 1$ с точно под местом взрыва. Какова будет скорость второго осколка v_2 и в каком направлении он станет двигаться?

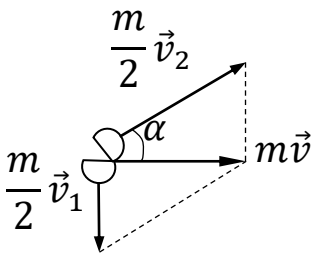


Рис. 3.35

3.28. На неподвижной платформе установлено орудие, ствол которого направлен под углом $\alpha = 60°$ к горизонту (рис. 3.36) Масса платформы с орудием $M = 15$ т. На какое расстояние S откатится

платформа с орудием после выстрела, если масса вылетевшего снаряда $m = 20$ кг и вылетает он со скоростью $v = 600\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$? Коэффициент сопротивления движению платформы $\mu = 0{,}1$.

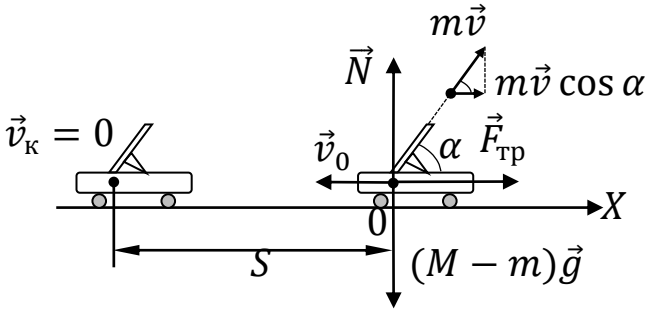


Рис. 3.36

Глава 4. ВИДЫ СИЛ

4.1. Закон всемирного тяготения

Мы уже говорили, что в механике рассматриваются три вида сил: силы тяготения, силы упругости и силы трения. Законы Ньютона, можно сказать, являются всеобщими: им подчиняются все виды сил. Кроме того, каждый вид сил подчиняется особому, присущему только ему закону. Так, силы тяготения подчиняются закону всемирного тяготения, силы упругости – закону Гука, силы трения – закону Кулона-Амонтона. Таким образом, основу механики Ньютона, которую иногда называют силовой механикой, составляют шесть законов – три общих и три закона, соответствующих видам сил.

Открытию закона всемирного тяготения предшествовало открытие Кеплером, законов движения планет вокруг Солнца.

Кеплер, исследуя движение Марса, пришел к трем законам движения планет:

1) все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце;

2) радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равные площади;

3) квадраты времен обращения планет прямо пропорциональны кубам больших полуосей.

Кеплер сам высказал предположение, что все эти три закона являются следствием одного более общего закона, что движение планет осуществляется под действием некоторой силы. Он полагал, что эта сила действует тангенциально к орбите, пытался ее найти, но неудачно, так как исходил из ложной предпосылки.

Ньютон первым показал, что сила, действующая на планету, является радиальной, и что из законов Кеплера следует ее обратно пропорциональная зависимость от квадрата среднего расстояния между планетой и Солнцем.

Покажем это для случая круговых орбит планет. Конечно, аналогичный расчет можно сделать и для эллиптических орбит, но он потребует значительно больше времени. Пусть первая планета движется по орбите радиуса r_1 и имеет период обращения T_1, а вторая – соответственно r_2 и T_2 (рис. 4.1).

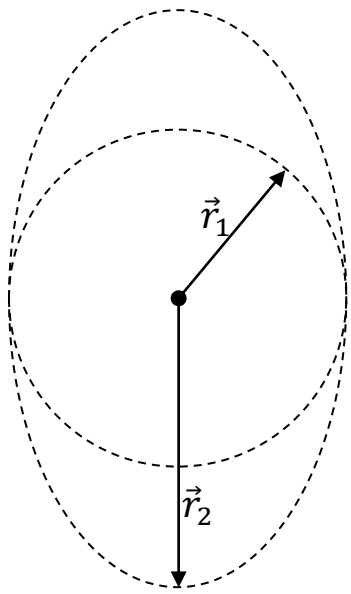


Рис. 4.1

Так как планеты движутся по окружности, то они имеют нормальные ускорения: $a_1 = \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}$ и $a_2 = \frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2}$. Откуда $\frac{a_1}{a_2} = \frac{r_1}{r_2} * \frac{T_2^2}{T_1^2}$.

По третьему закону Кеплера $\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{r_1^3}$. Заменяя отношение квадратов периодов обращения, получаем $\frac{a_1}{a_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$, т.е ускорение планеты обратно пропорционально квадрату радиуса орбиты. Это можно записать иначе: $a = c\frac{1}{r^2}$, где c – коэффициент пропорциональности. Применив второй закон Ньютона, которому подчиняются все виды сил, можно записать $F = c\frac{m}{r^2}$, где m – масса планеты, а F – действующая на нее сила. Из второго закона Ньютона следует, что направление ускорения совпадает с направлением вызывающей его силы. Поэтому на планету действует сила, направленная к Солнцу и обратно пропорциональная расстоянию от Солнца до планеты. Следовательно, Солнце притягивают к себе Солнце, что вытекает из третьего закона Ньютона. Эти силы взаимного притяжения тел получили название *сил тяготения* или *гравитационных сил*.

Ньютон предположил, что сила тяготения зависит не только от массы планеты, но также и от массы Солнца, т. е. коэффициент c пропорционален массе Солнца M:

$$c = \gamma M$$

Тогда $F = \gamma \frac{mM}{r^2}$, где γ – *гравитационная постоянная* или *постоянная тяготения*.

Сила тяготения прямо пропорциональна массам взаимодействующих тел, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена по линии, соединяющей эти тела.

Ньютон показал, что сила тяжести (т.е. сила притяжения тела к Земле) и сила тяготения имеют одинаковую природу. Известно, что у поверхности Земли сила тяжести сообщает любому телу ускорение $9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$. Если же тело поднять на орбиту Луны, расстояние до которой 60 земных радиусов, то согласно закону тяготения на него должна действовать сила в 3600 раз меньшая и сообщать ему ускорение в $\frac{9{,}8\frac{\text{м}}{\text{сек}^2}}{3600} = 0{,}27\,\frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$. Ускорение Луны можно подсчитать и по кинематической формуле $\text{a} = \frac{4\pi^{2r}}{\text{T}^2}$, где r = 385000 км, T = 27,3 суток. В этом Ньютон увидел тождественность силы тяжести и силы тяготения.

Однако, закон тяготения находился в ранге гипотезы до 1846 г, когда Леверье с его помощью рассчитал положение на небесной сфере неизвестной еще в то время планеты Нептун. Предложение Ньютона было проверено практикой и получило название закона всемирного тяготения.

Качественно закон всемирного тяготения выполняется для всех тел. Количественно же в записанной выше форме он выполняется только для материальных точек и для шаров с правильным распределением плотностей (под правильным распределением плотностей понимается такое их распределение, при котором плотность монотонно изменяется от центра к краям). В случае таких шаров под r понимается расстояние между центрами. Если расстояние между телами произвольной формы сравнимы с их размерами, то нужно мысленно их разделить на малые элементы, подсчитать все элементы одного из тел, и найти их равнодействующую.

4.2. Изменение силы тяжести в зависимости от географической широты и высоты

Пусть на поверхности Земли на широте φ (рис. 4.2) лежит тело. Как известно широтой называют дугу меридиана, измеряемую от эк-

ватора. Этой дуге соответствует численно равный ей центральный угол. На это тело действует две силы: сила тяготения $\vec{F}$ направленная к центру Земли, и сила нормального давления $\vec{N}$ не радиальна, так как вместе с силой $\vec{F}$ они должны дать равнодействующую $\overrightarrow{F_n}$, необходимую, чтобы тело вместе с Землей обращалось вокруг земной оси:

$$F_n = m\omega^2 r_\varphi.$$

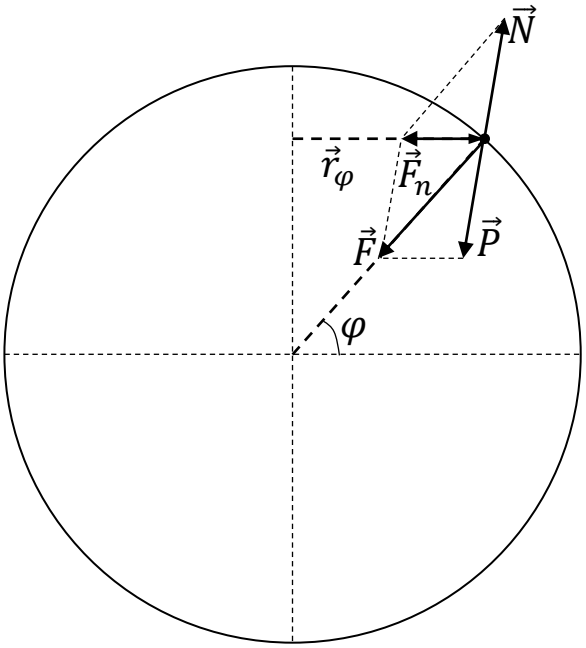


Рис. 4.2

Если наблюдатель находится на Земле, то обнаружить силу $\overrightarrow{F_n}$ он не сможет. Силу же $\vec{N}$ всегда можно обнаружить и измерить. Весом или силой тяжести назвали силу, которая уравновешивает силу нормального давления. Таким образом, вес (сила тяжести) не равен силе гравитации (за исключением полюсов) и не направлен к центру Земли (за исключением полюсов и экватора). Так как $\vec{F}_n = \vec{F} + \vec{N}$, а $\vec{N} = -\vec{P}$, то $\vec{\mathrm{P}} = \overrightarrow{F} - \vec{F}_n$. Вес с увеличением широты возрастает: на полюсах $P = F$, а на экваторе $\vec{\mathrm{P}} = \overrightarrow{F} - \vec{F}_n$.

Вычислим, каково влияние широты на изменение веса. На полюсах, $P_n = \gamma\frac{mM}{r^2}$, а на экваторе $P_Э = \gamma\frac{Mm}{r^2}$ - $\mathrm{m}\omega^2 r$. Найдем $\frac{F_n}{P} = \frac{\omega^2 mr}{\gamma\frac{mM}{r^2}} = \frac{\omega^2 r^3}{\gamma M}$. Все входящие в полученное отношение величины известны. Расчет показывает, что $\frac{F_n}{P} \approx \frac{1}{290}$. Отсюда видно, что с точностью,

достаточной для практических целей, можно считать вес равным гравитационной силе.

Найдем как изменится ускорение свободного падения с высотой. Его величину у поверхности Земли обозначим через g_0. Если пренебречь вращением Земли, то $g_0 = \frac{F}{m} = \gamma \frac{M}{r^2}$, где r - радиус Земли. На некоторой высоте h над поверхностью Земли ускорение силы тяжести будет:

$$g = \gamma \frac{M}{(r+h)^2} = g_0 \frac{r^2}{(r+h)^2} = g_0 \frac{1}{(1+\frac{h}{r})^2} \approx g_0 \frac{1}{1+2\frac{h}{r}}.$$

Из полученной формулы видно, что изменение g с высотой не будет происходить линейной, но в первом приближении для малых изменений высоты это изменение можно считать линейным (у поверхности Земли g убывает на каждый км высоты примерно на 0,03%).

4.3. Постоянная тяготения. Опыты Кавендиша

С целью определения гравитационной постоянной был поставлен ряд опытов. Рассмотрим опыт, поставленный Кавендишем в 1798 г. Основной частью опытной установки, являлись крутильные весы: коромысло с двумя грузами массой m каждый, подвешенное на упругой нити (рис. 4.3). К грузам коромысла подносились тяжелые свинцовые шары массой *M*. В результате тяготения между шарами коромысло поворачивалось на угол α. Для удобства измерения угла α применялся зеркальный отсчет: к середине коромысла прикреплялось зеркальце, отраженный от него пучок света падал на экран. При повороте зеркала на угол 2α, что облегчало отсчет.

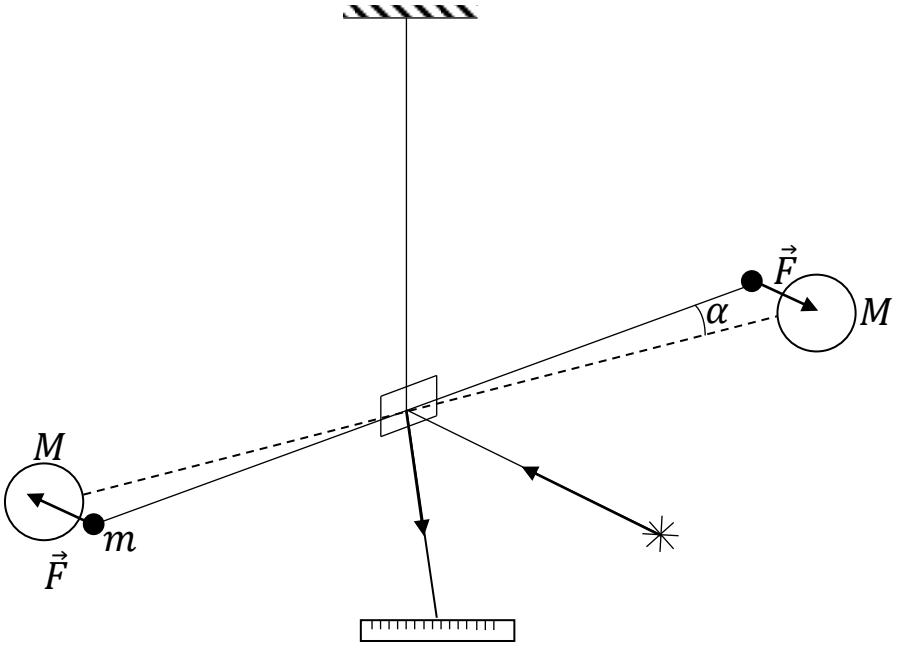


Рис. 4.3

При повороте коромысла упругая нить закручивалась до тех пор, пока упругий момент закрученной нити, который прямо пропорционален углу закручивания нити $k\alpha$, не уравновешивался моментом сил тяготения $\gamma\frac{mM}{r^2}l$, где l – длина коромысла, а r – расстояние между центрами большого и малого шаров, т. е. $k\alpha = \gamma\frac{mM}{r^2}l, \gamma = \frac{k\alpha r^2}{mM}l$.

Все входящие в правую часть равенства величины могут быть измерены. Коэффициент пропорциональности k для данной нити определялся опытным путем. Значение гравитационной постоянной в системе СИ $\gamma = 6{,}67 * 10^{-11}\ \frac{\text{м}^3}{\text{кг сек}^2}$, а в системе CGS $\gamma = 6{,}67 * 10^{-8}\ \frac{\text{см}^3}{\text{г сек}^2}$.

4.4. Масса инертная и масса гравитационная

Как мы видим, масса входим как в формулу второго закона Ньютона, так и в формулу закона всемирного тяготения. В связи с этим встает ряд вопросов: одинаковый ли физический смысл имеют эти массы, одинаковы ли методы их измерений, одинаковы ли их величины для одного и того же тела? Попытаемся ответить на эти вопросы.

Во втором законе Ньютона масса, являясь *мерой инертности*, характеризует инертное свойство материи; другими словами – характеризует свойство различных материальных объектов по-разному реагировать на одинаковые внешние воздействия (силы). В связи с этим масса, входящая в формулу второго закона Ньютона, получила названии *инертной массы*.

Массы же, входящие в формулу закона всемирного тяготения, обуславливают величину силы тяготения, т.е. связаны с совершенно другим свойством материи – тяготением, и являются его мерой. Эти массы называются *гравитационными* и *тяжелым массами*. Следовательно, инертная и гравитационные массы имеют различный физический смысл, так как являются мерами совершенно различных и на первый взгляд никак не связанных между собой свойств материи.

Очевидно, и методы их измерения будут так же различными. Сравнивания между собой ускорения, которые приобретают тела под действием одинаковых сил, можно сравнивать между собой инертные массы. Методы сравнения гравитационных масс иные. Одним из таких методов является сравнение гравитационных масс с помощью крутильных весов. Используя постоянные массы M и укрепляя на конце коромысла различные тела, можно по углу закручивания нити сделать вывод о том, какое тело имеет большую гравитационную массу. Вполне понятно, что эталоны инертной и гравитационной массы, могут быть, вообще говоря, различными. Например, было бы удобным выбрать так эталон гравитационной массы, чтобы коэффициент γ в законе всемирного тяготения обращался в единицу.

Оказалось, что инертная масса пропорциональна гравитационной для одного и того же тела.

Докажем это, пусть мы имеем два тела. Вес первого тела $P_1 = m'_и g_1$, где $m_и'$ - инертная масса первого тела, а g_1 – его ускорение свободного падения. В данное входит инертная масса, так как выражение $P = mg$ есть частный случай второго закона Ньютона в применении к свободному падению. Если пренебречь эффектом, связанным с вращением Земли, то вес можно определить и по закону всемирного тяготения: $P_1 = \gamma \frac{m'_g M}{R^2}$, где M – масса Земли, R – радиус Земли, m_g'- гравитационная масса первого тела.

По аналогии для второго тела можно написать: $P_2 = m''_и g_2$,, $P_2 = \gamma \frac{m''_g M}{R^2}$.

Из этих выражений следует: $m'_и g_1 = \gamma \frac{m'_g M}{R^2}$, $m''_и g_2 = \gamma \frac{m''_g M}{R^2}$.

Поделив эти равенства друг на друга и считая $g_1 = g_2$, мы получим, что инертные массы пропорциональны гравитационными: $\frac{m'_и}{m''_и} = \frac{m'_g}{m''_g}$.

Таким образом, доказательство пропорциональности инертной и гравитационной масс сводится к доказательству равенства ускорений свободного падения для все тел в данной точке. Решить этот вопрос можно только экспериментальным путем. Первые эксперименты были поставлены еще Ньютоном. Он определял ускорения свободного падения различных тел с помощью маятника. В мешочки и баночки, подвешиваемые к нитям, он насыпал различные сыпучие тела и наливал различные жидкости. Ньютон нашел, что пропорциональность между инертной и гравитационной массами выполняется с точностью до 10^{-3}. Позднее Этвешем в 1894 г. Эта пропорциональность была доказана с точностью до 0,5 * 10^{-8}, а в 1961 г. Дикке – с точностью до 10^{-10}.

Если же в качестве эталонов инертной и гравитационной масс выбрать один и тот же эталон, то в этом случае инертная и гравитационная массы будут выражаться одинаковым числом с точностью до 10^{-10}. Так и поступили. За эталон массы приняли массу платиноиридиевого цилиндра, хранящегося в Международном бюро мер и весов в Севре (близ Парижа). Инертная масса этого цилиндра 1 кг и гравитационная его масса также 1 кг. В связи с этим различие масс с практической точки зрения исчезло и имеет смысл говорить просто о массе материального объекта.

Чем же объясняется наличие пропорциональности различных видов масс (инертной, гравитационной и некоторых других, с которыми мы познакомимся в других частях курса)? Только тем, что при всех различных измерениях, используя различные свойства материи, мы фактически измеряем одну и ту же величину, которая характеризует собой с количественной стороны материю. Поэтому масса есть физическая величина, характеризующая материю во всех ее видах с количественной стороны. Какую же все-таки массу мы измеряем с

помощью рычажных весов и гирь? Совершенно очевидно, что в этом случае мы сравниваем две массы по их притяжению к Земле, т.е. по их гравитационным свойствам, а, следовательно, измеряем гравитационную массу.

4.5. Возникновение деформаций

Под деформацией понимается изменение формы или объема тела. Если все точки тела движутся с равными скоростями в каждый определенный момент времени, то расстояния между ними будут неизменными, а поэтому ни изменения формы, ни изменения объема не будет.

Для того, чтобы объем или форма тела изменялись, необходимо изменение расстояний между точками тела. Это будет происходить только в том случае, если их скорости будут различными. Например, поставим на стол резинку от карандаша и нажмем на нее пальцем. При этом верхние слои резинки придут в движение, а нижние слои, соприкасающиеся со столом, останутся неподвижными. Изменение формы резинки возникает в результате того, что различные ее части двигаются с разными скоростями. Отсюда следует вывод, что деформация является результатом движения различных частей тела с различными скоростями, т.е. результатом изменения движения частей тело, что в свою очередь является результатом действия сил.

Исследуя деформации, мы вынуждены разделять тело на отдельные элементы и рассматривать их движение. Детальные исследования требуют учета молекулярной и атомной структуры тел. Однако, при решении большого количества задач, рассматриваемых, так называемой, механикой сплошных сред, в этом нет никакой необходимости. Достаточно, чтобы рассматриваемые элементы тела были настолько малы, что действующие на них внешние силы можно было считать постоянными по всему элементу.

В то же время число молекул или атомов в этом элементе должно быть достаточно большим, чтобы их тепловое движение не приводило к заметному изменению занимаемого ими объема независимо от действующих на них внешних сил. Очевидно, что если выбранный нами элемент тела содержит 3-4 молекулы, то в результате теплового движения расстояния между ними будут изменяться с течением вре-

мени, а поэтому будет изменяться и занимаемый ими объем. Оказывается, что если в качестве рассматриваемых элементов выбрать весьма малые объемы порядка 10^{-6} мм^3 (кубики с ребрами 0,01 мм), то число молекул в них будет очень велико – порядка 10^{12}-10^{14} молекул. При таком большом числе молекул изменения занимаемого ими объема, возникающие в результате теплового движения, будут очень малыми по сравнению с самим объемом, а поэтому его можно считать постоянным. В связи с этим в дальнейшем под «бесконечно малыми» объемами мы будем понимать такие малые объемы, которые содержат не менее 10^5-10^6 молекул.

К таким малым элемента тела мы можем применять законы механики Ньютона.

Рассмотрим процесс возникновения деформацией в некоторых случаях. Пусть какое-либо недеформированное тело (например, резиновый шнур) находится в относительном покое. Разделим его мысленно на несколько частей и подействуем на него внешней силой $\vec{F}$ (силами тяжести для упрощения рассуждений пренебрежем), которая равномерно распределена по всему сечению тела (рис. 4.4).

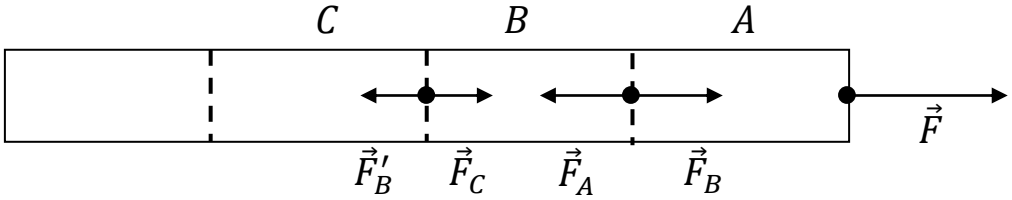


Рис. 4.4

Под действием этой силы правый конец тела придёт в движение с некоторым ускорение. Остальные же части тела сначала будут находиться в покое, так как на них не действует еще никакие силы. Но если один конец тела пришел в движение, а другой еще нет, то тело изменит свою форму, т.е. будет деформироваться. Для того, чтобы пришла в движение следующая часть тела, на нее должна подействовать сила со стороны уже пришедшей в движение части тела. Таким образом, часть тела *A* действует на часть тела *B*, а часть тела *B* должна, согласно третьему закону Ньютона, действовать на часть *A* с такой же силой. Следовательно, действие внешней силы, а во-вторых, привело к возникновению внутренних сил – сил упругости.

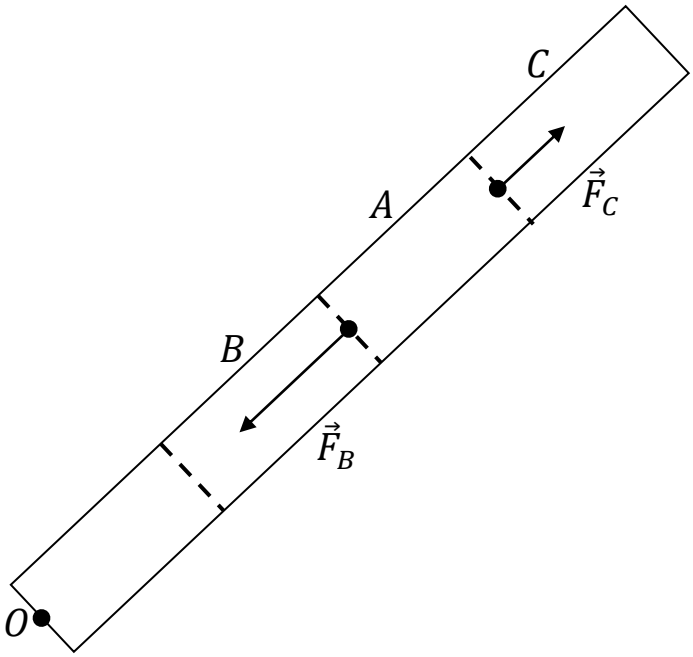


Рис. 4.5

Следует обратить внимание на причинно-следственные связи в рассматриваемом процессе. Причиной деформации тела является внешняя сила, т.е. деформация является ее следствием. В результате деформации возникают упругие силы, т.е. деформации является причиной возникновения упругих сил.

Очевидно, что упругие силы будут иметь различные величины в различных сечениях тела. На элемент тела *B* действуют две противоположно направленные силы $\overrightarrow{F_B}$, с которой на него действует часть тела *A*, и $\overrightarrow{F'_B}$, с которой на него действует часть тела *C*. Применив второй закон Ньютона к части тела *B*, можно написать:

$$m_B a = F_B - F'_B, \text{т. е. } F_B > F'_B.$$

Деформируется ли вращающееся твердое тело?

Пусть стержень вращается вокруг оси *O* с постоянной угловой скоростью ω (рис. 4.5). Выделим в нем три элемента (*A*, *B*, *C*). Так как элемент *A* движется по окружности, то он имеет нормальное ускорение, которое вызывается нормальной силой. Следовательно, на элемент *A* должна действовать со стороны элемента *B* упругая сила, направленная к оси вращения. Но в свою очередь элемент *A* удерживает на круговой траектории элемент *C*, действуя на него с некоторой силой, направленной к оси вращения. Согласно третьему закону Ньютона, элемент *C* в свою очередь действует на элемент *A* с такой же по

величине силой, направленной в противоположную сторону, т.е. от центра ($\overrightarrow{F_C}$). Таким образом, так же, как и в случае поступательного движения, при вращательном движении на каждый элемент тела действуют противоположно направленные силы, в результате чего все части тела находятся в деформированном состоянии.

Согласно второму закону Ньютона $m_A a_n = F_B - F_C$, т.е. $F_B > F_C$. Мы видим, что упругие силы, возникающие в различных сечениях вращающегося стержня, имеют различные величины: они больше в сечениях, расположенных ближе к оси. Если мы будем увеличивать угловую скорость стержня, то упругие силы, удерживающие его элементы на круговых траекториях, должны тоже увеличиваться. Однако, может получаться, что даже при наибольших допустимых деформациях упругие силы, возникающие в близлежащих у оси частях стержня, не достаточны для удержания более удаленных от оси частей на круговой траектории. Тогда внешние части начнут двигаться по раскручивающейся спирали, деформация внутренних частей будет увеличиваться, превзойдет допустимый предел и стержня являются не силы, а наоборот отсутствие достаточных сил, необходимых для удержания внешних частей стрежня на круговых траекториях.

Деформации возникают и под действием сил тяжести. Если взять достаточно тяжелую и в то же время весьма гибкую спиральную пружину и поставить ее на стол, то пружина сожмётся. Происходит эта деформация следующим образом. Коснувшись стола, нижний виток пружины останавливается. Верхние же витки под действием силы тяжести продолжают двигаться. Их движение прекратится только тогда, когда на них со стороны нижних витков будет действовать сила, равная весу верхних витков. Очевидно, что деформация не будет одинаковой по всей длине пружины: наиболее деформированной окажется нижняя часть пружины, наименее – верхняя.

По той же причине пружина, подвешенная за один конец, будет растянута. В этом случае наиболее деформированной окажется верхняя часть пружины и наименее – нижняя.

Конечно, все сказанное выше относится не только к пружинам, а и ко всем телам вообще. Любое тело, лежащее на подставке или подвешенное, оказывается соответственно сжатым или растянутым, хотя глазом обнаружить эти деформации не всегда удается. Именно пото-

му, что тела оказываются деформированными, они и действуют на подставку или подвес.

Первопричиной этой деформации является сила тяжести.

4.6. Виды деформаций

В зависимости от количества сил или пар сил, действующих на тело взаимного расположения их точек приложения деформации, можно разделить на четыре вида: растяжение (или сжатие), изгиб, сдвиг, кручение.

Если к прямому стрежню приложить две силы, направленные по оси стержня в противоположные стороны (рис. 4.6, а), то они растянут стержень и возникнет *деформация растяжения*. Когда же две противоположно направленные по оси стержня силы действуют навстречу друг другу, то возникнет *деформация сжатия* (рис. 4.6, б). Чистая деформация сжатия возникает лишь в коротких стержнях, у которых наименьший поперечный размер меньше длины не более чем в 8-10 раз. Если же длина тела значительно превышает поперечные размеры, то под действием сжимающих сил вместе с деформацией сжатия может возникнуть и продольный изгиб (рис 4.6, в).

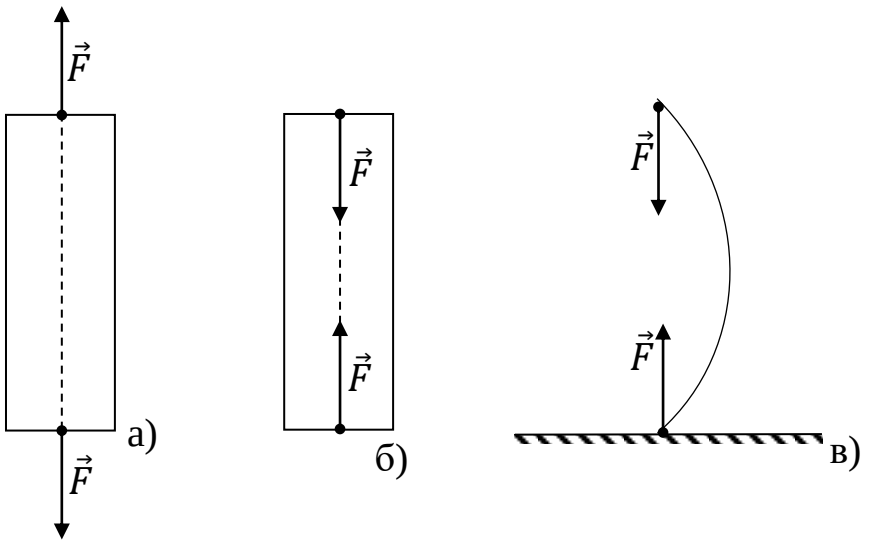


Рис. 4.6

Величину деформации растяжения (сжатия) характеризуют величиной абсолютного и относительного удлинения. Если l – длина тела до растяжения, а l_1 – после растяжения, то *абсолютное удлинение* тела $\Delta l = l_1 - l$. *Относительное удлинение* (или, как часто говорят, отно-

сительная деформация растяжения) $\varepsilon_l = \pm\frac{\Delta l}{l}$ характеризует величину растяжения или сжатия, причем ε_l соответственно положительно или отрицательно.

Растяжение (или сжатие) стержней сопровождается их поперечным сжатием (или расширением), которое характеризуется величиной относительного поперечного сжатия $\frac{\Delta d}{d}$, где d – поперечный размер образца, Δd – абсолютная величина его изменения. Отношение относительного поперечного сжатия к относительному удлинению называется *коэффициентом Пуассона* μ:

$$\mu = \frac{\Delta d * l}{\Delta l * d}.$$

Коэффициент Пуассона не зависит от размеров тел и для всех тел, сделанных из одного и того же материала, имеет одно и тоже значение. Поэтому коэффициент Пуассона является константой, характеризующей свойства вещества. Для многих металлов он близок по величине к 0,25, для материалов типа резины он равен примерно 0,5.

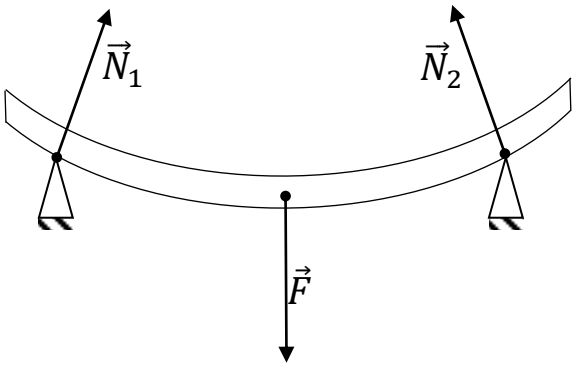


Рис. 4.7

Если на стержень действуют силы, перпендикулярные к его оси и лежащие в одной плоскости, то возникает *деформация изгиба* (рис. 4.7). Данную систему сил можно представить и в виде двух пар, вращающих стержень в противоположные стороны. Действительно, сила $F = N_1 + N_2$ так как стержень находится в равновесии. Разложив силу

$\vec{F}$ на две составляющие, одна из которых равна $\overrightarrow{N_1}$, а другая – $\overrightarrow{N_2}$, мы получаем две пары сил, вращающих стержень в противоположных направления.

Сдвигом называют такую деформацию твердого тела, при которой все его плоские слои, параллельные некоторой плоскости, называемой плоскостью сдвига, не искривляясь и не изменяясь в размерах, смещаются параллельно друг другу (рис 4.8). Сдвиг возникает в результате действия двух пар сил, лежащих в одной плоскости. Очевидно, что одна пара сил $\vec{F}\vec{F}_1$ вызывала бы только вращение тела. В случае же равновесия на тело должна действовать вторая пара сил, имеющая вращающий момент, равный и противоположный моменту первой пары. В частном случае, показанном на рис. 4.8 (тело лежит на опоре), первой парой является сила $\vec{F}$ и сила трения покоя $\overrightarrow{F_1}$, а вторую пару образуют вес $\vec{P}$ и сила нормального давления $\vec{N}$.

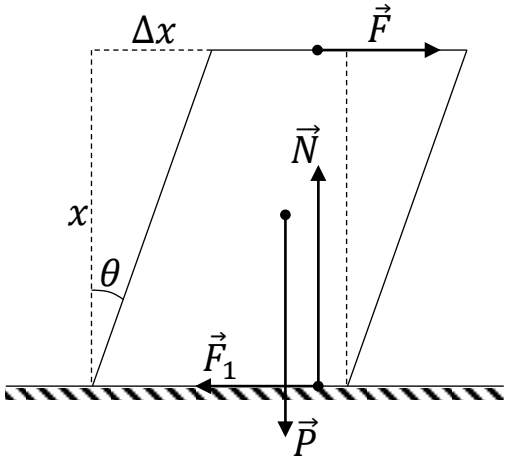


Рис. 4.8

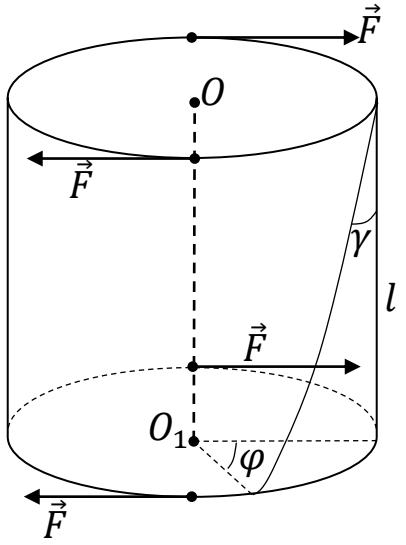


Рис. 4.9

Деформация сдвига определяется величиной *относительного сдвига*

$$\varepsilon_\theta = \frac{\Delta x}{x} = tg\theta \approx \theta.$$

Деформация кручения возникает в том случае, если две пары сил, расположенные в различных плоскостях, вращают тело в противоположные стороны (рис. 4.9). В результате этого все поперечные сечения стержня поворачивается вокруг оси OO_1 на некоторые углы,

тем больше по величине, чем дольше эти сечения расположены друг у друга. Угол поворота φ называется *углом кручения*.

Относительной деформацией кручения называют величину

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{\varphi}{t}.$$

Деформация кручения может быть сведена к неоднородному сдвигу. Действительно, все слои стержня сдвинулись в параллельных плоскостях друг относительно друга. Однако величина сдвига будет различной. Точки лежащие на оси вращения, совершенно не смещаются. Чем дальше от оси OO_1 мы выберем точки, тем больше они будут сдвинуты друг относительно друга. Углу кручения φ будет соответствовать угол сдвига γ.

В случае малых деформаций все виды деформаций могут быть сведены к двум видам: деформации сжатия или растяжения (изгиб можно рассматривать как неоднородное сжатие и неоднородное растяжение) и деформации сдвига.

4.7. Закон Гука

Как мы уже знаем, действие внешней силы на тело приводит к возникновению внутренних сил. Если тело находится в покое, то после установления деформации внутренние силы в любом сечении равны внешним силам, а поэтому величина упругих сил может быть измерена величиной внешних сил.

Определение. *Усилием* называют величину, измеряемую внешней силой, действующей на единицу площади поверхности тела.

Определение. *Напряжением* называют величину, измеряемую внутренней силой, действующей на единицу площади сечения тела.

Как внешняя, так и внутренняя силы в любом сечении могут быть направлены и не перпендикулярно к выбранной поверхности. В связи с этим как усилие, так и напряжение могут быть разложены на нормальные и тангенциальные.

Английский физик Р. Гук в 1675 г. Экспериментально установил, что *напряжение в упруго деформированном теле прямо пропорционально величине относительной деформации* (**Закон Гука**):

$$\sigma = kx \cdot \varepsilon.$$

Коэффициент пропорциональности kx носит название *модуля упругости*. Его величина определяется свойствами материала, из которого изготовлено тело. В зависимости от вида деформации модуль упругости имеет различные наименования, обозначения и численные значения. Величина, обратная модулю упругости $\alpha = \frac{1}{k_x}$, называется *коэффициентом упругости*.

Зависимость напряжения от деформации может быть изображена графически. На рис. 4.10 показана такая зависимость для деформации растяжения, полученная в результате эксперимента. До точки *A* график представляет собой прямую линию. В этом интервале деформация тела подчиняется закону Гука.

Предельное значение напряжения, начиная с которого отступления от линейности становятся заметными, называется *пределом пропорциональности* (σ_n).

Вполне понятно, что значение предела пропорциональности определяется точностью измерений, с помощью которых и обнаруживается отклонение от линейности.

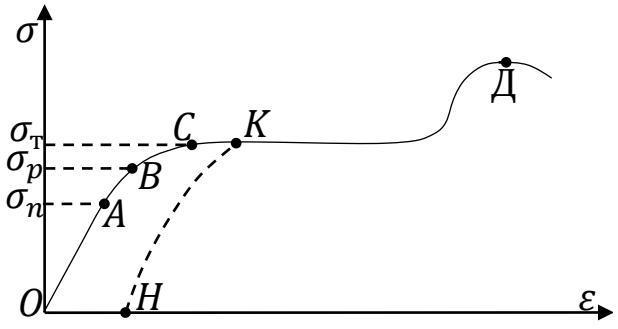


Рис. 4.10

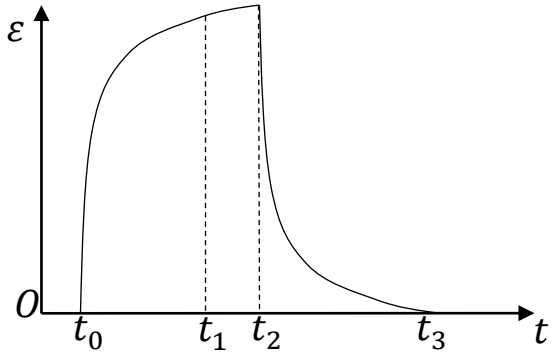


Рис. 4.11

При *упругой деформации*, после прекращения действия внешних сил, деформация полностью пропадает.

Предельное значение напряжения, начиная с которого в теле начинают возникать *остаточные деформации* (т.е. деформации, сохраняющиеся в теле после снятия внешних сил), называется *пределом упругости* (σ_y).

Участок кривой *AB* очень мал. За пределом упругости в теле возникают остаточные или пластические деформации. В этом случае после прекращения действия внешних сил убывание деформации изобразится уже не кривой *BO*, а параллельной ей (рис. 4.10).

Тела, в который могут возникать большие упругие деформации, называются *упругими*. Тела, в которых уже при небольших нагрузках возникают остаточные деформации, называются *пластичными*. Однако такое деление тел на упругие и пластичные чисто условно. Как упругую, так и пластическую деформацию можно наблюдать у всех твердых тел.

Характер деформации зависит и от продолжительности взаимодействий. Так, например, при длительном действии пальцем на пластилин из него можно сделать ту или иную фигуру. В этом случае пластилин ведет себя как пластическое тело. Но при сильном и кратковременном ударе о пол тело из пластилина подпрыгивает и сохраняет свою форму как упругое тело.

При напряжении σ_T деформация возрастает без увеличения внешних сил, тело «течет». Напряжение σ_T называется *пределом текучести*.

Материалы, имеющие значительную область текучести, называется *вязкими* (пластилин, глина, асфальт и т.п.). Материалы, у которых область текучести практически отсутствует, называются *хрупкими* (стекло, фарфор, бетон и т.п.).

При дальнейшем растяжении в теле опять начинают возрастать напряжения, но не беспредельно. Максимальное напряжение, возникающее в теле перед его разрушением, называется *пределом прочности* (σ_P). Если напряжение превышает предел прочности, то в одном из сечений тела образуется сужение (шейка), в котором и происходит его разрыв.

Кроме остаточных деформаций в телах возникает и так называемое *упругое последействие*. Оказывается, что при длительном воздействии внешних сил вначале за короткий промежуток времени деформация возрастает очень быстро, а затем происходит дальнейшее медленное ее нарастание, продолжающееся нередко много суток (рис. 4.11). При снятии нагрузки деформация быстро убывает, но тело при этом не принимает первоначальных размеров. Лишь после длительного промежутка времени, в течение которого деформация постепенно уменьшается, тело придет в первоначальное состояние.

Упругому последействию, особенно отчетливо наблюдаемому при постоянной нагрузке, родственно явление релаксии, заключающееся в ослаблении напряжения при заданной длине. Релаксия осо-

бенно хорошо заметна в жильных струнах музыкальных инструментов: струна после быстрой натяжки, при которой ей придается определенная длина, со временем несколько понижает тон вследствие уменьшения натяжения.

Если деформацию, при которой перейдем предел пропорциональности, с последующим снятием нагрузки повторить несколько раз, то прочность материала увеличивается и одновременно происходит увеличение предела пропорциональности и уменьшение области текучести. Это явление называется *наклепом* (рис. 4.12). Для того, чтобы материалу вернуть первоначальные свойства его необходимо отжечь, т.е. нагреть до высокой температуры, а затем медленно охладить.

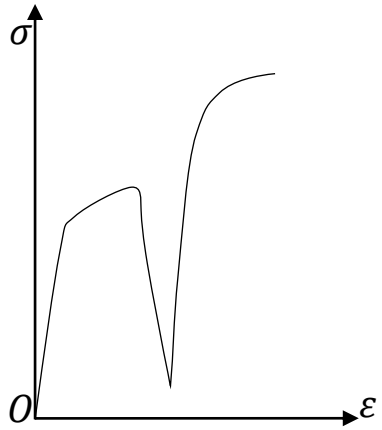


Рис. 4.12

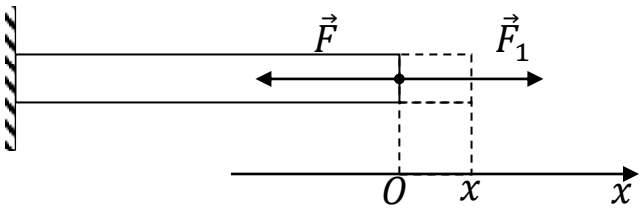


Рис. 4.13

Вернемся к закону Гука и от его общей формы перейдем к выражениям, которые удобно использовать при том или ином виде деформации.

1. Для *деформации растяжения* (или *сжатия*) по закону Гука напряжение в сечении S:

$$\sigma = k_x \frac{\Delta l}{l}.$$

Откуда *упругая сила*, действующая на всю площадь сечения:

$$F = k_x \frac{\Delta l}{l} S.$$

Модуль упругости для продольного удлинения называется *модулем Юнга* и обозначается буквой E. Он зависит только от вещества тела и является для данного вещества величиной постоянной. Очевидно, модуль Юнга численно равен такому напряжению, которое возникает в образцах с поперечным сечением равным единице при

увеличении их длины вдвое. Такое увеличение длины выдерживает, не разрушаясь только каучук.

Для одного и того же тела его первоначальная длина и сечение являются величинами постоянными, а поэтому величина упругой силы будет зависеть только от абсолютного удлинения тела: $F = k\Delta l$.

Если это равенство написать в проекции на ось x, однонаправленную с внешней силой F_1 (рис. 4.13), то $F = -kx$, так как сила F противоположна положительному направлению оси x.

2. При *деформации сдвига* величина тангенциального напряжения прямо пропорциональна относительному сдвигу:

$$\sigma_\tau = G\theta,$$

где $\sigma_\tau = \frac{F_\tau}{S}$ – отношение силы к величине сечения, параллельного направлению действия силы, а G – коэффициент пропорциональности, называемой *модулем сдвига*.

3. При *деформации кручения* крутящий момент пары

$$M = f\frac{\varphi}{l},$$

где f – *модуль кручения*.

4.8. Силы трения. Трение покоя и трение скольжения

Силы трения по своему характеру существенно отличаются от сил тяготения и упругих сил. Отличие заключается в том, что силы трения не зависят от взаимного положения тел или частей тела, а зависят от относительной скорости взаимодействующих тел. Вопрос о происхождении сил трения выходит за рамки механики, а поэтому мы ограничимся только изучением свойств сил трения и той роли, которую они играют при движении.

Различают *два типа трения*:

1) *сухое трение*, возникающее при тангенциальных взаимодействиях соприкасающийся тел (сани по снегу, ось без смазки в подшипнике, колесо по рельсу и т.п.);

2) *вязкое* или *жидкое трение*, которое наблюдается при перемещении твердого тела относительно жидкости или одного слоя жидкости относительно другого (ось со смазкой в подшипнике, снаряд в воздухе, подводная лодка в воде и т.п.).

Характер зависимости от скорости сил сухого трения и жидкого трения разрешено разное их поведение при небольших скоростях. При сухом силы трения всегда имеют конечную величину, даже, когда скорость движения равна нулю. В случае жидкого трения сила трения, когда скорость уменьшается с уменьшением скорости и равна нулю, когда скорость относительного движения обращается в нуль. Различия в характере зависимости сил трения по-разному влияют на движение.

Характер зависимости силы жидкого трения от относительной скорости приближенно показан на рис. 4.14. При малых относительных скоростях сила трения пропорциональная первой степени скорости: $F = -k_1 v$, где k_1 – *коэффициент трения* (знак минус указывает, что силы направлена противоположно относительной скорости). При больших относительных скоростях сила трения пропорциональна второй степени скорости: $F = -k_2 v^2$. Значения коэффициентов k_1 и k_2 зависят от свойств среды, формы тела и состояния их поверхностей.

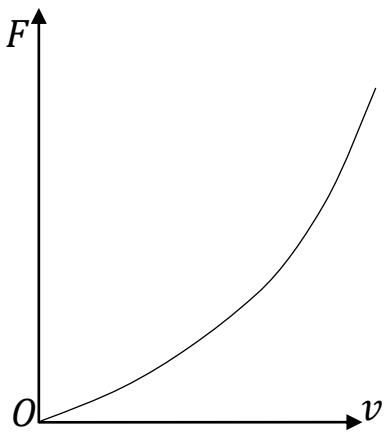


Рис. 4.14

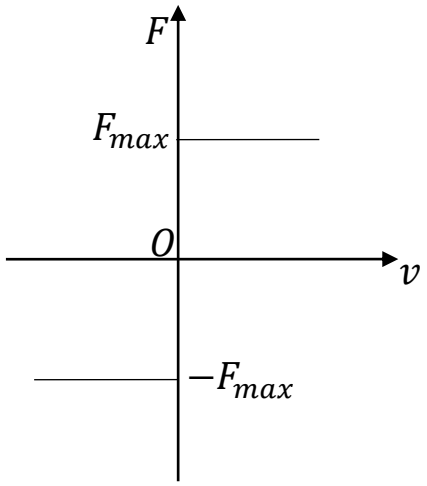


Рис. 4.15

Если на горизонтальную поверхность стола положить какое-либо тело и приложить к нему небольшую по величине силу, направленную горизонтально, то тело из состояния покоя не выйдет. Это означает, что приложенная нами сила уравновешена тангенциальной силой взаимодействия соприкасающихся поверхностей стола и тела.

Определение. Сила трения, которая возникает в случае соприкасающихся, но неподвижных тел, называется *силой трения покоя*. Величина силы трения покоя равна величине той внешней силы, которая приложена к телу и направлена в противоположную ей сторону.

Если нет внешней силы, которая стремилась бы вывести тело из состояния покоя, то нет и силы трения.

Сила трения покоя неоднозначна. Она может иметь различную величину и разное направление в плоскости соприкосновения, но при этом ее величина не может быть больше некоторого определенного значения, которое называется *максимальной силой трения покоя*. Можно считать, что максимальная сила трения равна той внешней силе, которая выводит тело из состояния покоя.

Для максимальной силы трения покоя справедлив закон Кулона-Амонтона: *сила трения прямо пропорциональна силе нормального давления*

$$F_{\text{п}(max)} = k_{\text{п}} N,$$

где $k_п$ – *коэффициент трения покоя*, а N – сила нормального давления опоры на тело.

Когда внешняя сила равна $F_{\text{п}(max)}$, возникает скольжение. Если тело движется равномерно и прямолинейно, то внешняя сила уравновешена так называемой *силой трения скольжения*.

Опыт показывает, что **для сил трения скольжения выполняется закон Кулона-Амонтона**:

$$F_{\text{с}} = k_{\text{с}} N,$$

где k_c – коэффициент трения скольжения.

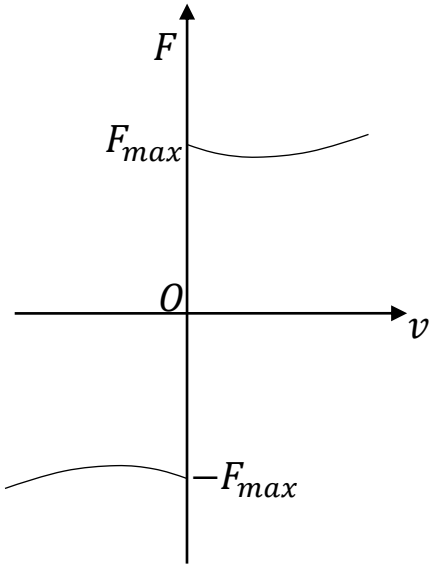


Рис. 4.16

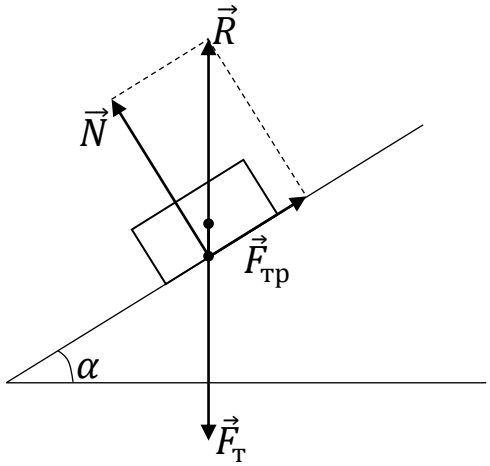


Рис. 4.17

В некоторых случаях (например, при малых скоростях скольжения сухих металлических поверхностей) сила трения скольжения

весьма мало зависит от скорости и примерно равна максимальной силе трения покоя (рис. 4.15). В этом случае $k_c = k_n$ является постоянным и закон Кулона-Амонтона выполняется.

Однако, характер зависимости силы трения скольжения от скорости для различных тел и неодинаковой обработки поверхностей весьма различен. Обычно для разнородных материалов сила трения скольжения с увеличением скорости движения вначале уменьшается, а затем увеличивается (рис. 4.16). В связи с этим $k_c < k_n$ и, кроме того, k_c различен при различных скоростях. Но изменение коэффициента трения скольжения не особенно велики, а поэтому и в этом случает можно считать, что закон Кулона-Амонтона приближенно выполняется. К тому же данные относительно сил трения скольжения весьма приближенны, что связано не только с механической отделкой поверхностей, но и с их чистотой – ничтожные следы масла и т.п. вызывают совершенно иной характер зависимости сил трения от скорости.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть тело находится в равновесии на наклонной плоскости (рис. 4.17).

Если тело при данном наклоне плоскости равномерно скользит вдоль нее, то сумма сил $\vec{P} + \vec{N} + \overrightarrow{F_{\text{тр}}} = 0$ или $\vec{P} + \vec{R} = 0$, т.е. $\vec{P} = \overrightarrow{-R}$. Из чертежа видно, что в этом случае $tg\alpha = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = k_c$.

Таким образом, при равномерном скольжении тела вдоль наклонной плоскости тангенс угла ее наклона равен коэффициенту трения скольжения.

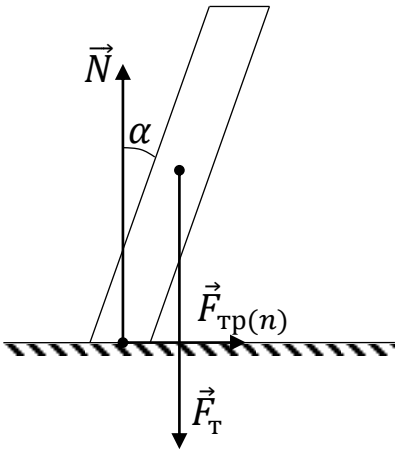


Рис. 4.18

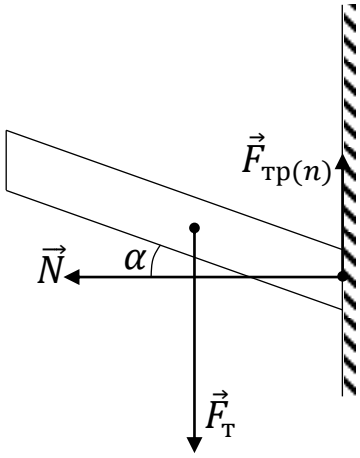


Рис. 4.19

Если же тело находилось в состоянии покоя, то значение тангенса угла наклона, при котором оно выходит из состояния покоя, будет равно коэффициенту трения покоя:

$$tg\alpha_1 = \frac{F_{\text{тр}(max)}}{N} = k_{\text{п}}.$$

2. Пусть велосипедист совершает поворот в горизонтальной плоскости. Для этого, как хорошо известно, ему необходимо наклониться в сторону поворота (рис. 4.18). Для того, чтобы велосипедист не опрокинулся, необходимо равенство моментов силы нормального давления и силы трения покоя (если отсутствует проскальзывание, то сила трения, перпендикулярная к направлению движения является силой трения покоя) относительно его центра массы:

$$Nl\,sin\alpha = F_n l\,cos\alpha,,$$

где l – расстояние от центра массы до точки приложения сил N и F_n. Отсюда получаем $tg\alpha = \frac{F_n}{N}$..

Если $tg\alpha \leq k_n$, то велосипедист может наклоняться на угол α, совершая поворот. Если же $tg\alpha > k_n$, то при наклоне велосипедиста возникнет проскальзывание шин, и он опрокинется.

3. Объясним движение мотоциклиста по вертикальной стене цилиндра – один из цирковых номеров. При этом мотоциклист не располагается перпендикулярно к стене, а движется под некоторым к ней углом (рис. 4.19). Рассуждая аналогично предшествующему случаю, получим, что $tg\alpha = \frac{F_n}{N}$.

Подсчитаем минимальную скорость, при которой мотоциклист будет удерживаться на стене. Очевидно, что для этого необходимо, чтобы $F_{n(\max)} = P$.

Если предположить, что движение мотоциклиста равномерно, то

$$\frac{mv^2}{R} = N,$$

где R – радиус окружности, которую описывает центр массы мотоциклиста. Но $F_{n(max)} = k_n N$, тогда $P = k_n \frac{mv^2}{R}$ и $v = \sqrt{\frac{gR}{k_n}}$.

Нетрудно заметить, что с увеличением скорости возрастает сила нормального давления, а с ее ростом увеличивается и сила трения покоя.

4.9. Трение качения

Объяснить возникновение сил трения качения можно только при учете деформаций катящегося тела и опорной поверхности. Деформация опорной поверхности в ряде случаев хорошо заметна. Например, если автомобиль движется по рыхлой земле или тот же автомобиль движется по асфальтированной дороге, то ее деформация на глаз не заметна, но это совершенно не означает, что ее нет.

Если колесо находится в покое относительно дороги, то оба эти тела деформируются. На колесо действуют сила тяжести $\vec{F}_{\text{т}}$ и сила реакции со стороны дороги, которая складывается из сил реакций, приложенных к отдельным элементам поверхности колеса. Все элементарные силы реакций, нормальные к ободу колеса, будут распределены симметрично относительно вертикали, проходящей через ось (центр тяжести). Равнодействующая всех этих сил будет направлена вертикально и пройдет через ось (рис. 4.20). В данном случае вес и сила реакции уравновешиваются. Очевидно, что элементарные силы реакций будут больше по мере приближения элементов поверхности колеса к вертикали, проходящей через центр тяжести, так согласно закону Гука, большая деформация вызывает и большие силы упругости.

При качении колеса по опорной поверхности необходимо учесть, что деформация не исчезнет мгновенно, остается упругое последствие. Благодаря этому симметрия в распределении элементарных сил реакций нарушается.

Так как колесо тоже деформируется (сплющивается), то сила нормального давления, перпендикулярная к ободу колеса, не проходит через ось (рис. 4.21).

Видно, что сила $\vec{N}$ имеет момент относительности центра тяжести, а поэтому должна вызвать вращение колеса вокруг точки C (в нашем случае против часовой стрелки). Для того, чтобы оценить ее вращательное действие, перенесем силу $\vec{N}$ в точку пересечения линий действия $\vec{F}_{\text{т}}$ и $\vec{N}$, и разложим ее на две составляющие, одну из которых направим вертикально, а другую горизонтально (рис. 4.22).

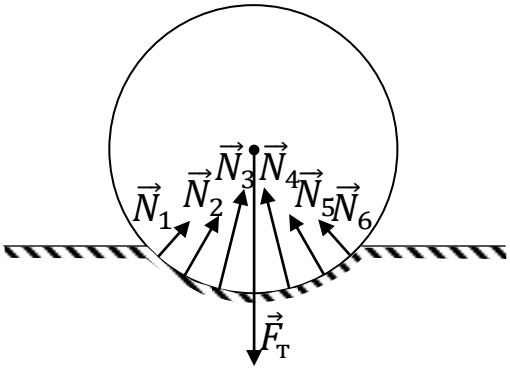


Рис. 4.20

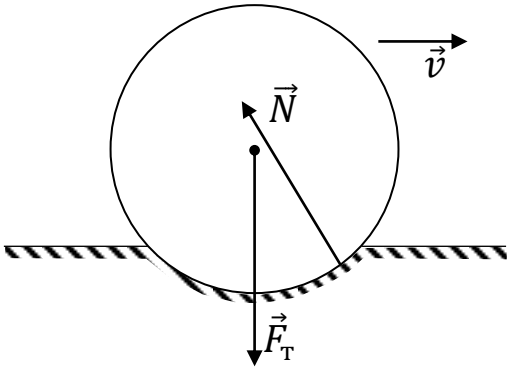


Рис. 4.21

Силы $\vec{F}_т$ и $\overrightarrow{N_1}$ уравновешиваются, так как опыт показывает, что в вертикальном направлении колесо не перемещается. Следовательно, общее действие $\vec{F}_т$ и $\vec{N}$ сводится к действию составляющей $\overrightarrow{F_k}$. Эта сила вызывает ускорение, направленную в сторону, противоположную скорости движения его центра масс, а поэтому его линейная скорость будет уменьшаться.

Одновременно с этим моментом силы $\overrightarrow{F_k}$ относительно центра массы вызывает угловое ускорение, которое будет уменьшать угловую скорость колеса. Таким образом, сила $\overrightarrow{F_k}$ препятствует качению и может быть названа силой сопротивления при качении.

Определим ее величину и выясним, от каких характеристик колеса она зависит. Для этого из точки приложения силы нормального давления опустим перпендикуляр на вертикаль, проходящую через центр массы. Треугольники *ABO* и *OKE* подобны.

Напишем отношение сходственных сторон:

$$\frac{F_k}{N_1} = \frac{\text{AB}}{\text{OB}}.$$

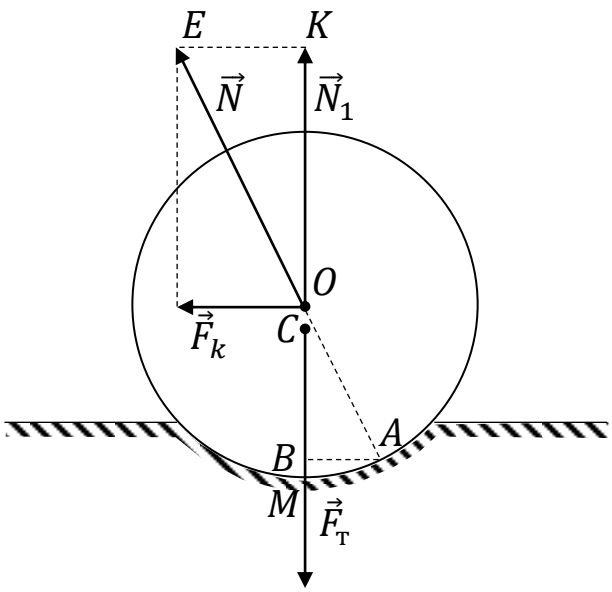


Рис. 4.22

Отрезок *OB* можно считать равным радиусу колеса *CM*, так как отрезки *CO* и *BM* малы по сравнению с ним, а поэтому одну малую величину *CO* можно заменить другой малой величиной *BM*. Следовательно,

$$F_k = \frac{\text{AB}}{\text{CM}} N_1.$$

Величина *AB* называется *коэффициентом силы трения качения* и измеряется в единицах длины. Значение коэффициента силы трения качения очень мало (например, колесо со стальным бандажом по стальному рельсу – 0,5 мм, деревянный каток по дереву – 0,5-0,8 мм, шарик из закаленной стали по стали – 0,005-0,01 мм).

В связи с этим вынос точки приложения силы $\vec{N}$ практически очень мал по сравнению с радиусом колеса и абсолютные значения сил $\vec{N}$, $\overrightarrow{N_1}$ и $\vec{F}_т$ можно считать равными.

Обозначив $AB = \alpha$, $CM = R$, можно окончательно написать $F_k = \frac{\alpha}{R}N$, т.е. сила сопротивления, возникающая при качении, прямо пропорциональна силе нормального давления. В связи с тем, что для силы сопротивления при качении выполняется основной закон трения (закон Кулона-Амонтона), ее назвали силой трения качения.

4.10. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции

Как известно, неинерциальными называют такие системы отсчета, в которых первый закон Ньютона не выполняется. Если система отсчета движется относительно инерциальной равномерно и прямолинейно, то она будет тоже инерциальной. Если же система отсчета движется относительно инерциальной с ускорением, то первый закон Ньютона в ней выполняться не будет, и она будет неинерциальной. Например, пусть в вагоне на абсолютно гладкой полке (трением пренебрегаем) лежит шар (рис. 4.23). На шар действует вес $\vec{P}$ и сила нормального давления $\vec{N}$. Когда вагон находится в покое или равномерном прямолинейном движении относительно Земли (будем считать систему отсчета, связанную с Землей, инерциальной), то шар сохраняет состояние покоя относительно вагона. Если же вагон движется с ускорением, то шар покатится с ускорением по полке в сторону, противоположную направлению ускорения вагона. Так как в данном случае шар не сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения относительно вагона, то первый закон Ньютона в системе отсчета, связанной с вагоном, не выполняется, т.е. эта система отсчета будет неинерциальной.

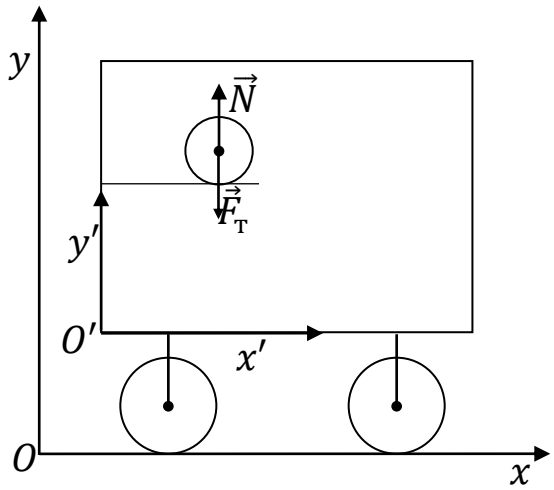


Рис. 4.23

Аналогично в равномерно и прямолинейно движущемся автобусе человек может стоять совершенно так же, как и на Земле. Но в случае ускоренного движения автобуса (например, при торможении) че-

ловек перестает сохранять состояние покоя, т.е. закон инерции в системе отсчета, связанной с автобусом, не выполняется.

Основные утверждения механики гласят:

1) ускорения вызываются только силами;

2) всякая сила обусловлена действием на данное тело каких-либо других тел.

Будут ли эти положения справедливы в неинерциальных системах? Вернемся к описанным ниже примерам. Шар получил ускорение относительно вагона, но мы можем указать силу, которая его вызвала, так как шар в направлении его ускорения не подействовало какое-либо тело. Совершенно также человек в ускоренно движущемся автобусе получил ускорение противоположное ускорению автобуса, хотя его в этом направлении никто не толкал. Таким образом, если оставить в силе первое утверждение, то не будет выполняться второе, и наоборот, если оставить в силе второе утверждение, то не будет выполняться первое.

Чтобы выйти из этого противоречия, решили оставить в силе первое утверждение. Для объяснения же возникновения ускорений в инерциальных системах ввели силы, которые не характеризуют собой взаимодействия реальных тел и определяются движением системы отсчета. Эти силы получили названия *фиктивных сил* или *сил инерции*. Действительно, находясь в тормозящем автобусе, мы ощущаем как бы действие силы, хотя реального действия других сил на нас нет. Поскольку силы инерции не характеризуют собой взаимодействия сил, то они не подчиняются третьему закону Ньютона.

Определим, как вычислить силу инерции. Ранее мы рассматривали движение одной системы отсчета относительно другой с постоянной скоростью.

Что же изменится в наших рассуждениях, если система отсчета $x'O'yz'$ будет двигаться с ускорением относительно системы отсчета $xOyz$, то есть v_0 будет величиной переменной? Очевидно, первое дифференцирование преобразований Галилея приведет нас к равенству:

$$\vec{v} = \overrightarrow{v'} + \vec{v}_0.$$

Второе же дифференцирование даст:

$$\vec{a} = \overrightarrow{a'} + \vec{a}_0,$$

т.е. абсолютное ускорение равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений.

В инерциальной системе отсчета выполняется второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F},$$

где a есть абсолютное ускорение. Используя теорему о сложении ускорений и переходя к неинерциальной системе отсчета (ускорение в ней будет относительным), можно написать:

$$m\overrightarrow{a'} = \sum \vec{F} - m\overrightarrow{a'}_0.$$

С другой стороны, если мы хотим пользоваться и в неинерциальной системе отсчета вторым законом Ньютона, то мы должны кроме реальных сил учесть еще и силы инерции, т.е.:

$$m\overrightarrow{a'} = \sum \vec{F} + \vec{F}_и,$$

где $F_и$ – *сила инерции*. Сопоставляя последние два равенства, можно сделать вывод, что $F_и = -ma_0$, т.е. *сила инерции равна взятому с обратным знаком произведению массы тела на переносное ускорение* (т.е. ускорение неинерциальной системы относительно инерциальной).

Если же неинерциальную систему отсчета скрепить непосредственно с движущимся телом, то в этом случае $\overrightarrow{a'} = 0$ и $\sum \vec{F} + \vec{F}_и = 0$.

Последнее равенство есть одно из условий равновесия тел. Таким образом можно, введя силы инерции, решение задачи динамически свести решению задачи статистики. Этот метод получил название **принципа Даламбера**: *при движении тела, действующие на него силы, и сила инерции удовлетворяют условиям его равновесия*.

Тогда согласно принципу Даламбера должно выполняться и второе условие равновесия (конечно, если учесть силы инерции):

$$\sum \overrightarrow{M}_0 + \sum \overrightarrow{M}_и = 0,$$

то есть геометрическая сумма моментов сил и моментов сил инерции относительного любого центра равна нулю.

Остановимся на вопросе о точке приложения силы инерции. Расчленим тело на отдельные элементы. Силы инерции, действующие на отдельные элементы, будут пропорциональны их массам (аналогично силам тяжести). Строго говоря, элементарные силы тяжести пропорциональны гравитационным массам элементов, а элементарные силы инерции – инертным массам. Но так как с большой степенью точности эти массы пропорциональны, то это различие не мешает проведению аналогии между силами гравитации и инерции. В свя-

зи с этим *равнодействующая всех элементарных сил инерции будет приложена к центру массы тела*.

Чтобы лучше понять разницу в объяснении механических явлений в различных системах отсчета, рассмотрим ряд примеров, при объяснении которых будем параллельно пользоваться как инерциальной, так и неинерциальной системами отсчета.

1. Остановимся более подробно на рассмотрении первого примера (рис. 4.23).

Когда вагон находится в покое, то действующие на шар силы $\vec{F}_{\text{т}}$ и $\vec{N}$ уравновешиваются. Если вагон получает ускорение, то в инерциальной системе (связанной с Землей) мы будем наблюдать следующую картину. Так как трение отсутствует, то согласно первому закону Ньютона, шар будет сохранять состояние покоя, полка вагона из-под шара выедет. При этом сила $\vec{N}$ обратится в нуль и под действием одной силы $\vec{F}_{\text{т}}$ шар будет падать вертикально вниз.

Несколько иную картину мы будем наблюдать в неинерциальной системе отсчета (связанной с вагоном). В ряде случаев рассмотрение явлений сильно упрощается, если мысленно самого себя поместить в неподвижную или движущуюся системы отсчета и представить себе, что мы будем наблюдать в том или ином случае. Другими словами, нужно все свести к картине, которую видит наблюдатель, помещенный в данную систему отсчета. Итак, если наблюдатель сидит в ускоренно движущемся вагоне, то для него шар покатится ускоренно вправо, хотя в этом направлении на шар не действуют другие тело. Следовательно, на шар вправо действует сила инерции, которая и сообщает ему это ускорение. Когда шар достигнет конца полки, то сила $\vec{N}$ обратится в нуль, и на шар будут действовать две силы: сила тяжести и сила инерции. Их равнодействующая будет составлять некоторый угол с горизонталью, а, следовательно, и с направлением скорости, которую к этому моменту времени получил шар. Если же на тело действует сила под углом скорости, то его движение будет криволинейным. Поэтому для наблюдателя в вагоне шар, покинув полку, начнет двигаться по криволинейной траектории. Как мы видим, траектории одного и того же движения в различных системах отсчета могут быть различными.

2. Пусть шар, лежащий на полке вагона, соединен с его стенкой пружиной (рис. 4.24). Вагон движется ускоренно относительно Земли.

В инерциальной системе отсчета пружина растягивается до тех пор, пока ее сила натяжения не сообщит шару такое же ускорение, какое имеет вагон.

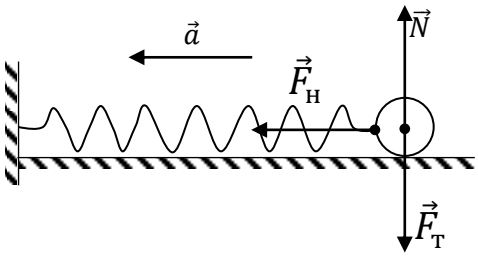


Рис. 4.24

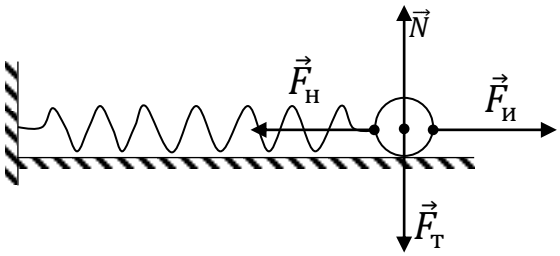


Рис. 4.25

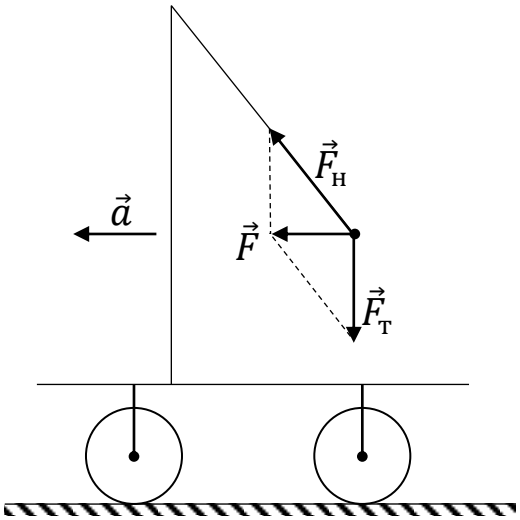


Рис. 4.26

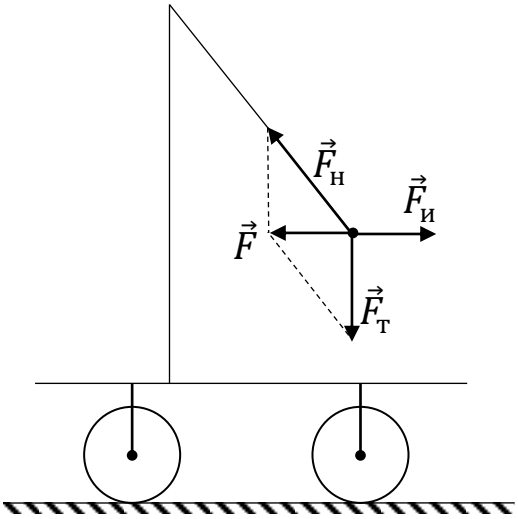


Рис. 4.27

В системе же отсчета, связанной с вагоном, шар покоится. Однако, кроме уравновешивающихся сил $\vec{F}_т$ и $\vec{N}$, на него действует сила натяжения. Так как в данной системе отсчета шар покоится, то сила натяжения пружины уравновешивается силой инерции (рис. 4.25).

3. На тележке, движущейся ускоренно относительно Земли, подвешен маятник (рис. 4.26).

В системе отсчета, связанной с Землей, маятник будет отклоняться от вертикального положения до тех пор, пока равнодействующая $\vec{F}$ силы натяжения нити и веса не сообщит телу маятника такого же ускорения, которое имеет тележка (возникающими при этом колебаниями маятника мы пренебрежем).

В системе же отсчета, связанной с тележкой, на тело маятника кроме силы натяжения нити и веса тела будет действовать сила инерции, которая станет отклонять маятник до тех пор, пока не уравновесится равнодействующая сил $\vec{F}$ и $\vec{F}_т$ (рис. 4.27).

4. Пусть в лифте, опускающемся ускоренно относительно Земли, находится какое – либо тело (например, человек). В системе отсчета, связанной с Землей, на это тело действуют сила тяжести $\vec{F}_т$ и сила нормального давления $\vec{N}$ (рис. 4.28). Его движение описывается уравнением $ma = F_т - N$. Отсюда видно, что $N < F_т$. Согласно третьему закону Ньютона это тело давит на пол лифта с силой, равной $\vec{N}$.

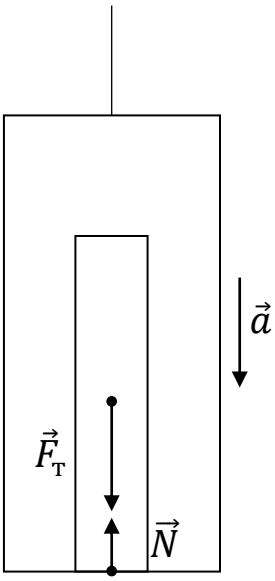


Рис. 4.28

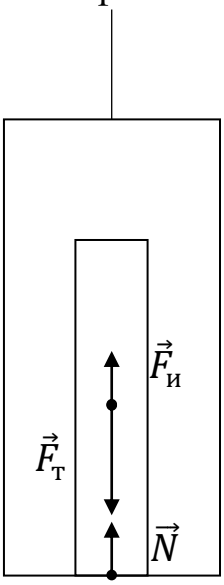


Рис. 4.29

Если лифт будет падать свободно $a = g$, то $mg = F_т - N$. Откуда $N = 0$. Это означает, что в случае свободного падения лифта его пол не давит на тело, тело не давит на пол. Другими словами, на тело действует только одна сила тяжести, а в связи с этим в теле будут отсутствовать внутренние деформации. Такое состояние тела, при котором в нем отсутствуют внутренние деформации, вызванные силой тяжести и реакцией опоры, называется состоянием невесомости. Происхождение термина «невесомость» следующее. Как известно, все весомые тела производят давление на горизонтальные опоры, неподвижные относительно Земли, но будет неподвижной в системе отсчета, связанной с телом. Не нужно думать, что в состоянии невесо-

мости тело не имеет веса: тело в любом случае притягивается к Земле, а поэтому имеет вес.

Невесомость, возникающая при свободном падении тела в гравитационном поле, получила название динамической невесомости в отличие от статистической невесомости, при которой силы гравитации уравновешиваются.

В системе отсчета, связанной с лифтом, на тело кроме веса и силы нормального давления действует еще сила инерции $\vec{F}_и$ (рис. 4.29). При этом $F_т - N - F_и = 0$.

Если учесть, что $F_и = -ma$, то мы получим то же равенство, что и в инерциальной системе отсчета. В случае свободного падения сила $\vec{N} = 0$, что наблюдатель, находящийся в лифте, может легко обнаружить, поместив между телом и полом лифта пружину. Так как тело находится в равновесии, то вес и сила инерции должны уравновешиваться.

4.11. Вращающиеся системы отсчета

Перейдем к рассмотрению случаев, когда неинерциальная система отсчета вращается относительно инерциальной.

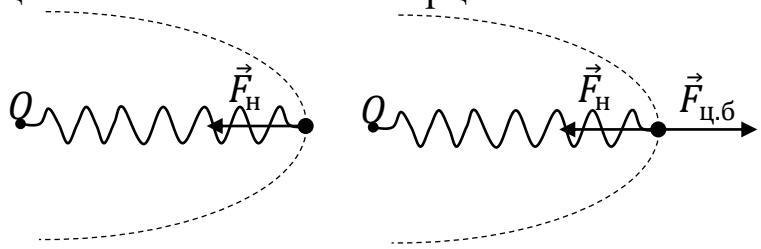


Рис. 4.30 Рис. 4.31

1. Пусть шарик равномерно обращается на упругой пружине в горизонтальной плоскости около некоторого центра *O* (силой тяжести для упрощения картины пренебрежем). В данном случае в системе отсчета, связанной с Землей, на шар действует только сила натяжения пружины, которая и сообщает ему нормальное ускорение (рис. 4.30).

Если скрепить систему отсчета с точкой *O*, а одну из осей координат направить на тело, то такая система отсчета будет вращаться относительно инерциальной, а шар в ней окажется неподвижным (рис. 4.31). Наблюдатель во вращающейся системе отсчета видит, что

на шар действует пружина, силу натяжения которой он может измерить, но шар при этом находится в покое. Следовательно, сила натяжения пружины должна быть уравновешена силой инерции. Эта сила инерции направлена от центра вращения, а поэтому и называется центробежной $-\overrightarrow{F_{\text{ц.б.}}}$.

Так как переносным ускорением в данном случае будет являться нормальное ускорение, то центробежная сила инерции $F_{\text{ц.б.}} = -m\omega^2 r$.

2. Пусть на равномерно вращающемся диске укреплены на разном расстоянии от оси два одинаковых маятника (рис. 4.32). При вращении диска нити обоих маятников отклонятся от вертикали, причем угол отклонения будет больше у маятника, более удаленного от центра диска.

Пропуская в целях упрощения рассмотрения процесса отклонения маятников, объясним их уже установившееся отклонение в инерциальной системе отсчета. Для того, чтобы маятники двигались по окружности они должны иметь нормальные ускорения, причем у более удаленного тела величина нормального ускорения должна быть больше, так как она прямо пропорциональна радиусу окружности ($\omega^2 R$). Эти ускорения вызываются силами, направленными к центру, причем на более удаленное тело должна действовать большая сила. Такими силами являются равнодействующие сил натяжения нитей и веса. Поэтому маятники должны отклониться от вертикали так, чтобы силы F_1 и F_2 вызывали необходимые для движения нормальные ускорения. Величина равнодействующей зависит от угла отклонения нити маятника от вертикали. В связи с этим более удаленный от центра маятник отклонится на больший угол.

Объясним отклонения маятников в неинерциальной системе. Кроме веса и силы натяжения нити на тела маятников действуют еще центробежные силы инерции (рис. 4.33). Чем дальше маятник находится от центра, тем больше величина центробежной силы, а поэтому и на больший угол отклоняется нить маятника.

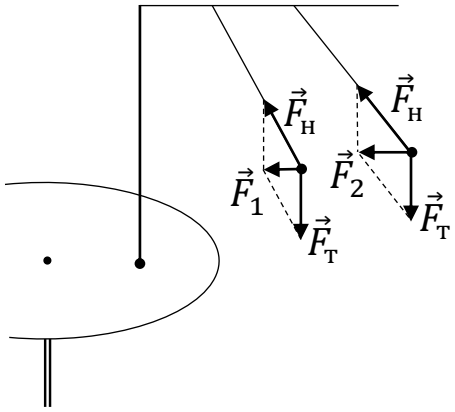


Рис. 4.32

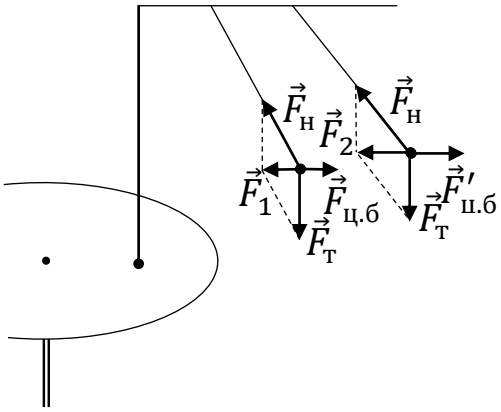


Рис. 4.33

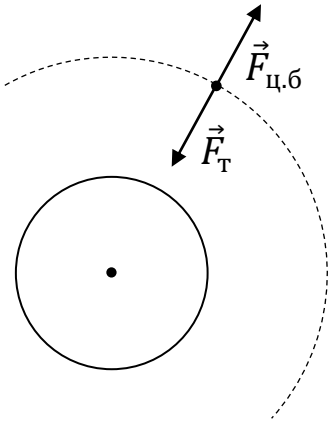


Рис. 4.34

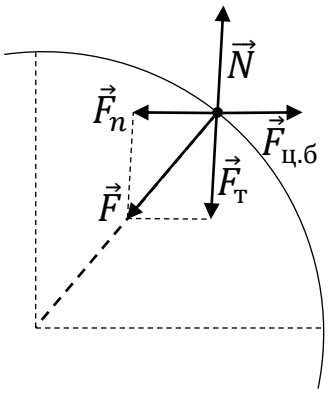


Рис. 4.35

3. Пусть вокруг Земли по круговой орбите движется спутник. Объяснение его движения нами уже рассматривалось. Отметим только, что на спутник действует только сила тяжести, в связи с чем он находится в состоянии свободного падения, а следовательно, в состоянии невесомости.

В неинерциальной системе отсчета на спутник кроме веса действует еще центробежная сила инерции, уравновешивающая его вес (рис. 4.34). Так как обе силы являются массовыми, то деформаций они не вызывают и спутник будет находиться в состоянии невесомости.

Рассмотрим движение тела, лежащего на поверхности Земли, при ее вращении. В неинерциальной системе отсчета мы это уже делали. В неинерциальной системе отсчета, скрепленной с Землей, на тело кро-

ме гравитационной силы и силы нормального давления действует центробежная сила инерции, которая уравновешивает равнодействующую двух первых сил (рис. 4.35). Как нетрудно сообразить из чертежа, вес оказывается геометрической суммой гравитационной силы и центробежной силы инерции, т.е. $\vec{F}_{\text{т}} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ц.б}}$

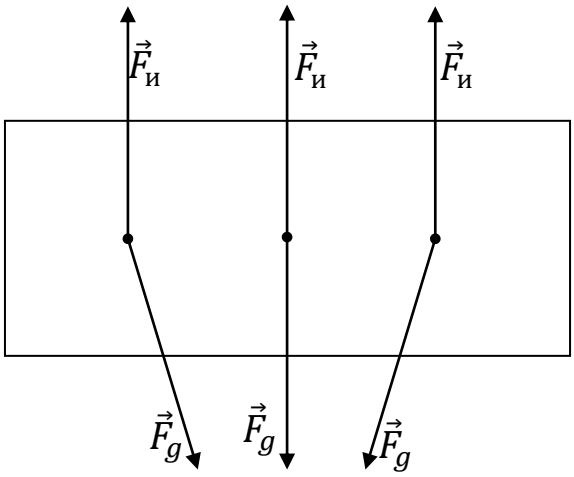


Рис. 4.36

Такое определение веса, как геометрической суммы сил гравитации и центробежной силы инерции, является весьма общим. Если система отсчета инерциальная, то сил инерции в ней нет, а поэтому вес представляет собой только гравитационную силу.

Существует лишь два вида массовых сил – это силы тяготения и силы инерции. Отличить друг от друга, производя опыты в ограниченной области пространства, без информации о том, что происходит вне ее, нельзя, поскольку они имеют одинаковое свойство: сообщать телу ускорение, не зависящее от его массы. Поясним сказанное следующим примером. Пусть лифт свободно падает. В системе отсчета, связанной с лифтом, на каждое находящееся на нем тело действуют силы тяготения и инерции, которое уравновешивают друг друга и не вызывают деформации этих тел. Картина останется прежней, если вместо сил инерции будут действовать силы тяготения, и наблюдатель, находящийся в лифте, разделить силы инерции и силы тяготения не сможет. Подчеркнем, что все сказанное относится лишь к ограниченной области.

Если бы размеры лифта были достаточна велики и наблюдатель мог производить очень точные опыты, то различить силы инерции и

силы тяготения возможно. Дело в том, что силы инерции в данном случае параллельны, а силы гравитации сходятся в одной точке, в которой находится центр тяготеющего тела (рис. 4.36). В результате действия этих сил точки *A* и *B* стали бы сближаться, что можно было бы обнаружить экспериментально. Однако, если размеры лифта малы по сравнению с расстоянием до тел, вызывающих силы тяготения, то различить силы тяготения и силы инерции невозможно.

Эквивалентность сил инерции и тяготения была положена Эйнштейном в основу общей теории относительности.

Глава 5. ЭНЕРГИЯ И РАБОТА

5.1. Энергия, работа, мощность

Окружающий нас мир состоит из движущейся материи. Другими словами – всё окружающее нас находиться в движении. Что же является мерой этого движение? С двумя такими мерами движения мы уже познакомились – это количество движения и момент количества движения. Как количество движения могут передаваться от одного тела к другому, причём в изолированных системах их величины сохраняются.

Рассмотрим, насколько эти меры движения являются универсальными.

1. Если тела движется поступательно, то при любой скорости его момент количества движения равен нулю. Следовательно, при поступательном движении момент количества движения не может являться мерой этого движения.

2. Если однородное тело равномерно вращается вокруг оси симметрии, то векторная сумма количеств движения всех его элементарных частей равна нулю при любой угловой скорости. Следовательно, количество движения не может являться мерой вращательного движения.

3. Если два абсолютно неупругих абсолютно одинаковых шара движутся навстречу друг другу с одинаковыми по абсолютному значению скоростями, то после удара они остановятся. Сумма количества их движения как до удара, так и после него сохранится – она равна нулю в обоих случаях. Однако состояние шаров изменилось после удара: их механическое движение «исчезло», но, как показывают измерения, температура их повысилась; их механическое движение перешло в молекулярную форму движения. Причем, как показывают измерения, изменение молекулярной формы движения оказывается пропорциональным не первой степени скорости, а ее квадрату. Следовательно, даже при поступательном движении, в случае его перехода в другие формы, количество движения не может являться мерой этого перехода.

Подобных примеров можно привести очень много. Из них следует, что ни количество движения, ни момент количества движения

не могут являться универсальными мерами движения во всех его формах.

Универсальной мерой движения материи во всех видах является энергия. Движение является неотъемлемым свойством материи. Поэтому всякий материальный объект обладает энергией или, как нередко говорят, - запасом энергии. Для характеристики качественно различных форм движения, изучаемых физикой, вводятся соответствующие им виды энергии - механическая, внутренняя, электромагнитная и т.д. Здесь мы ограничимся лишь рассмотрением механической энергии, соответствующей механической форме движения.

Движение может передаваться от одного тела к другому. Например, при взрыве пороха в стволе орудия движение пороховых газов передается снаряду. Движение может переходить и из одной формы в другую. Так, например, при торможении поезда его механическое движение переходит в молекулярное движение колодок, колес и рельс.

Определение. Процесс передачи механического движения от одного материального объекта к другому или перехода механического движения в другие формы движения называется *работой.*

Меру этого процесса называют *величиной работы*. Но обычно слово «величина» опускают и *под работой понимают как процесс, так и его меру*.

Величина работы измеряется скалярным произведением вектора силы, действующего на материальную точку, на вектор его перемещения:

$$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\Delta r \cos(\widehat{F, \Delta r}).$$

Но $F\,cos\left(\widehat{F, \Delta r}\right)$ – это проекция силы на ось, совпадающую с перемещением Δr, то есть $A = F_r\Delta r$.

Если $\widehat{F, \Delta r} < 90^{\circ}$, если $90^{\circ} < \widehat{F, \Delta r} < 180^{\circ}$, то $A < 0$, при $\widehat{F, \Delta r} = 90^{\circ}$, то $A = 0$.

Если сила переменна, то для расчета работы перемещение следует разбить на такие элементарные перемещения, чтобы в пределах каждого из них можно было считать величину силы постоянной. Тогда элементарная работа на каждом элементарном перемещении будет $A_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$. Полная работа $A = \sum A_i = \sum \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$.

Переходя к пределу при Δr, стремящимся к нулю, получаем:

$$A = \int_r \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Полученный интеграл можно представить и не в векторной форме. Так как $dr = ds$, а $F\cos(\widehat{F, \Delta r})$ есть проекция вектора силы на касательную, то $A = \int_s F_\tau ds$.

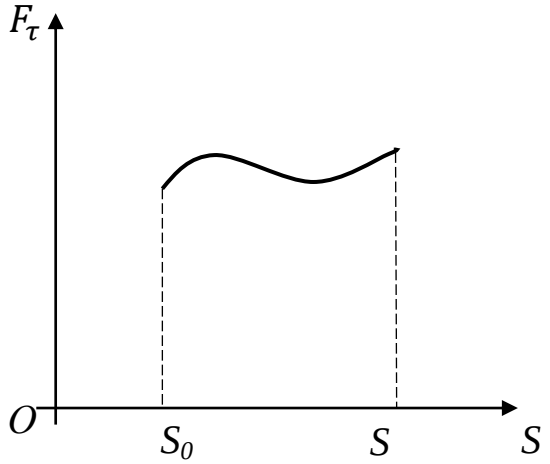


Рис. 5.1

Если величина касательной составляющей силы $\vec{F}$ является функцией пути, то согласно геометрическому представлению определённого интеграла, работа будет численно равна величине площади, заключённой между осью абсцисс, кривой и ординатами, кривой в начальной и конечной точках пути (рис. 5.1).

Докажем, что если на тело действует одновременно несколько сил, то работа равнодействующей равна алгебраической сумме работ составляющих сил.

Действительно, $\overrightarrow{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$.

Умножим обе части равенства скалярно на вектор перемещения Δr:

$$\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r} + \cdots + \vec{F}_n \cdot \Delta\vec{r}.$$

Левая часть неравенства есть работа равнодействующей, а правая часть представляет собой сумму работ составляющих сил:

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

Одно и то же движение может быть передано в различных случаях за неодинаковые промежутки времени. Так, например, передача движения, необходимого для подъема 1000 штук кирпича на четвертый этаж строящегося дома, может осуществляется и рабочим, и

подъемным краном. Однако это движение кирпичам кран передаст за меньший промежуток времени по сравнению с рабочим. В связи с этим имеет смысл говорить о скорости передачи движения.

Определение. Скорость передачи движения от одного материального объекта к другому или перехода движения из одной формы в другую называют *мощностью*:

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Подставляя в эту формулу значение элементарной работы, получим:

$$N = F\,cos\alpha\frac{\Delta r}{\Delta t} = Fvcos\alpha = F_\tau v.$$

5.2. Кинетическая энергия

В механике различают два вида энергии: кинетическую и потенциальную.

Определение. *Кинетической* энергией называют механическую энергию всякого движущегося тела.

Измерить изменение кинетической энергии можно с помощью работы, вызвавшей это изменение. Если начальная скорость тела равна нулю, то величина работы будет измерять его кинетическую энергию.

Пусть тело массой m под действием силы $\vec{F}$, двигаясь поступательно, изменило свою скорость от v_0 до v. Тогда из второго закона Ньютона следует:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Умножим обе части равенства скалярно на dr и возьмем от обеих частей равенства определенные интегралы:

$$\int_r \vec{F}dr = \int_{v_0}^{v} m\frac{d\vec{r}}{dt}d\vec{v} = \int_{v_0}^{v} m\vec{v}\,d\vec{v} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

или

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Если начальная скорость тела равна нулю, то $A = \frac{mv^2}{2}$, *т.е. тело массой* m, *двигаясь со скоростью* v, *обладает кинетической энергией, численно равной* $\frac{mv^2}{2}$.

Если система состоит из поступательно движущихся тел, то ее кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий тел, входящих в эту систему:

$$E_к = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Величина скорости зависит от выбора системы отсчета. При выводе формулы кинетической энергии мы пользовались вторым законом Ньютона, а, следовательно движение рассматривалось в инерциальной системе отсчета. Однако в различных инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, скорость одного и того же тела будет различной, а поэтому его кинетические энергии будут не одинаковыми. Другими словами, величина кинетической энергии зависит от выбора системы отсчета. Но это обстоятельство не существенно, так как все теоремы, касающиеся кинетической энергии, относятся только к ее изменениям, а не к ее абсолютной величине. Например, работа, производимая над каким-либо телом, численно равна изменению кинетической энергии.

Найдем кинетическую энергию вращающегося тела. Мысленно разбив его на элементарные объемы, для каждого из них можем написать, что

$$E_{к_i} = \frac{m_i {v_i}^2}{2}.$$

Кинетическая энергия тела, как система элементарных его частей будет

$$E_к = \sum \frac{m_i {v_i}^2}{2}.$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω, то линейная скорость его i-ой точки равна

$$v_i = \omega r_i.$$

Тогда *кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси*

$$E_к = \sum \frac{m_i \omega^2 {r_i}^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i {r_i}^2 = \frac{J\omega^2}{2},$$

где J – момент инерции тела относительно оси вращения.

Полученная формула аналогична выражению для кинетической энергии тела, движущегося поступательно, и служит ещё одним подтверждением того, что мерой инертности тела при вращении является момент инерции.

Любое плоское движение твёрдого тела можно представить себе состоящим из двух движений: поступательного и вращательного вокруг оси, проходящей через центр масс и имеющей неизменное направление в пространстве. Поэтому *в случае плоского движения тела* (например, качения колеса), *его кинетическая энергия равна*:

$$E_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где J – момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через его центр масс, ω – угловая скорость относительно той же оси, а v – линейная скорость центра массы.

5.3. Потенциальная энергия

Определение. Энергию, зависящую от взаимного положения взаимодействующих тел или частей тела, называют *потенциальной энергией*.

Поскольку потенциальная энергия является энергией взаимодействия, то отдельно взятая изолированная материальна точка ею обладать не может. Поясним это примерами. Изолированный камень, поднятый над Землей, не имеет потенциальной энергии. Но система «камень – Земля» имеет потенциальную энергию, обусловленную их взаимным положением и притяжением. Аналогично, отдельно взятая точка, растянутой пружины не имеет потенциальной энергии, но вся пружина, как система взаимодействующих точек, обладает потенциальной энергией. Когда мы говорим о потенциальной энергии поднятого над землей тела, то подобное выражение употребляется только для краткости, на самом же деле мы имеем ввиду потенциальную энергию системы «камень – Земля».

Потенциальной энергией могут обладать системы, в которых тела находятся в относительном покое (например, «камень – Земля»). Не противоречит ли это определению энергии, как меры движения? Никакого противоречия здесь нет, так как покой является частным случаем движения.

Найдем потенциальную энергию упруго деформированного тела. Мерой ее увеличения будет та работа, которая совершается над этим телом. Поэтому подсчитаем величину работы, которая совершается над упругим телом при деформации. При этом мы ограничимся рассмотрением случая деформации растяжения (сжатия). Согласно закону Гука, сила упругости $F_y = -kx$.

Работу же совершает какое-либо другое тело, действующее на рассматриваемое упругое тело с силой $\vec{F}$, которая согласно третьему закону Ньютона равна:

$$F = -F_y = kx.$$

Элементарная работа, совершаемая при удлинении упругого тела на dx, будет равна Fdx. Полная работа при растяжении от x_0 до x будет равна

$$A = \int_{x_0}^{x} Fdx = k\int_{x_0}^{x} xdx = \frac{kx^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2}.$$

Если первоначальное абсолютное удлинение $x_0 = 0$, т.е. первоначально тело не было деформировано, то

$$A = \frac{kx^2}{2}.$$

Эта величина и является мерой *потенциальной энергии упруго деформированного тела*, т.е.

$$E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}.$$

Мы видим, что в этом случае работа связана не с абсолютным значением потенциальной энергии, а с ее изменением (аналогично кинетической энергии). Поэтому выбор уровня потенциальной энергии, который мы примем за нулевой, можно осуществлять произвольно. В связи с этим абсолютное значение потенциальной энергии оказывается зависящим от выбора нулевого уровня.

Подсчитаем изменение потенциальной энергии системы тел, связанных силами тяготения. Пусть тело массой m находится на высоте h_0 над поверхностью Земли. Под действием силы F поднимем его на высоту h по произвольному пути (рис. 5.2). Условимся не учитывать различия между весом тела и силой его тяготения к Земле, а его движение будем рассматривать на таком небольшом по высоте и протяженности участке, что силы тяжести можно считать везде одинаковыми.

На тело массой m действуют вес и внешняя сила $\vec{F}$. Напишем второй закон Ньютона для этого тела и умножим обе части равенства скалярно на dr:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = \vec{F}\cdot d\vec{r} + \vec{P}\cdot d\vec{r}.$$

Заменяя в левой части равенства $\frac{d\vec{r}}{dt}$ через v, а в правой части

$$\vec{P} + d\vec{r} = Pdr\ \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -P\ dr\ \sin\alpha = -mg\ dh,$$

и интегрируя обе части равенства, получаем:

$$\int_{v_0}^{v} m\vec{v}\,d\vec{v} = \int_0^r \vec{F}\ \cdot\ d\vec{r} - \int_{h_0}^{h} mg\ dh.$$

Первый интеграл в правой части равенства есть работа, совершенная над телом. Проинтегрируем равенство и найдем работу:

$$A = mg(h - h_0) + \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Если скорости тела в начальной и конечной точке пути равны, то изменение кинетической энергии будет равно нулю, и совершаемая телом работа пойдет только на увеличение его потенциальной энергии:

$$A = mg(h - h_0) = mgh - mgh_0.$$

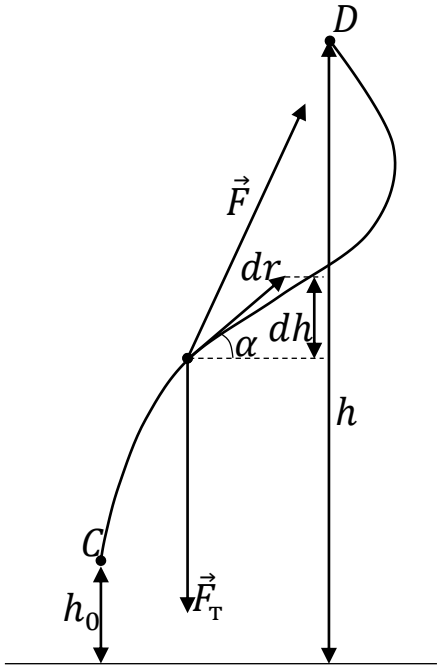


Рис. 5.2

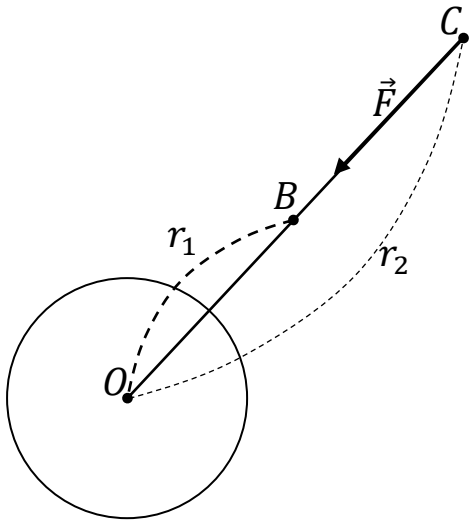


Рис. 5.3

Величина mgh и принимается за меру потенциальной энергии поднятого над Землей тела:

$$E_п = mgh.$$

Ее численное значение и знак зависят от выбора уровня, от которого мы будем отсчитывать высоту. Обычно потенциальную энергию системы «тело – Земля» считают равной нулю, когда тело лежит на поверхности Земли, то есть отсчет высоты производят от земной поверхности. Вообще говоря, это совершенно не обязательно. С такими же успехом за начальный уровень можно принять поверхность пола, стола и т.п.

Однако, приведенной выше формулой можно воспользоваться для подсчета потенциальной энергии только в том случае, если величина h мала по сравнению с радиусом Земли, так как лишь в этом случае можно принять $g = const$.

Подсчитаем потенциальную энергию системы «Земля – тело». Пусть в точке *C* находится тело (рис. 5.3). На него действует сила тяготения $\vec{F}$. Элементарная работа, совершаемая Землей над телом, при перемещении его на dr, будет равна: $\delta A = Fdrcos\pi = -Fdr$, тогда $A = -\int_{r2}^{r_1} Fdr = -\int_{r_2}^{r_1} \gamma \frac{mM}{r^2}\, dr = \gamma \frac{mM}{r_1} - \gamma \frac{mM}{r_2}$.

С другой стороны, эта работа может быть выражена через разность потенциалов энергий тела в положениях *C* и *B*.

$$A = E_C - E_B.$$

Сравнивая полученные выражения, видим, что $E_B = -\gamma \frac{mM}{r_1}$, а $E_C = -\gamma \frac{mM}{r_2}$, т.е. за меру *потенциальной энергии тяготения принимается величина*

$$E_п = -\gamma \frac{mM}{r}.$$

Не следует удивляться, потенциальная энергия получилась величиной отрицательной. В этом случае по мере уменьшения расстояния между телами она будет уменьшаться, а по мере увеличения этого расстояния – увеличиваться (рис. 5.4). Полученная формула подсказывает, что за нулевое значение потенциальной энергии удобно выбрать ее значение, когда тела находятся на бесконечно большом расстоянии: при $r = \infty$, $En = 0$.

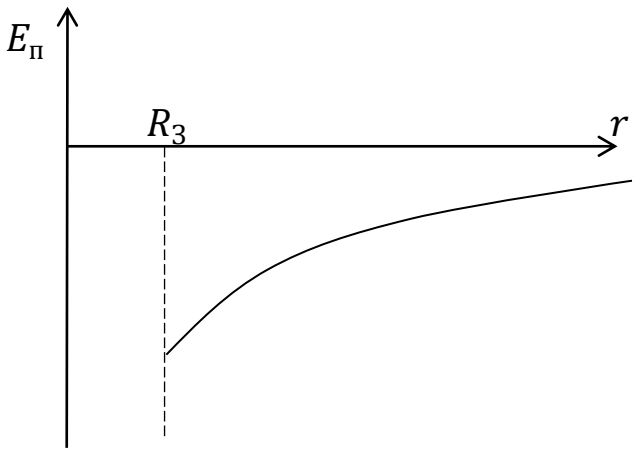


Рис. 5.4

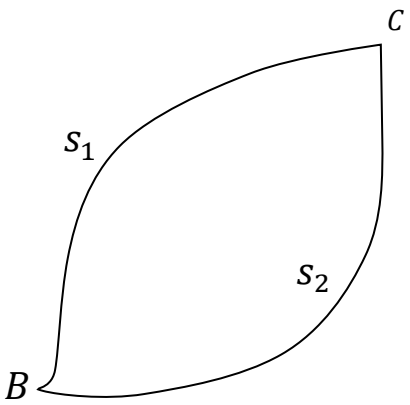


Рис. 5.5

Можно легко показать, что полученные нами формулы потенциальной энергии в поле тяготения не являются противоречивыми. Из второй формулы вытекает первая, как частный случай. Если расстояние r_1 и r_2 (рис. 5.3) достаточно велики, а их разность r_1 - r_2 мала, как это, например, имеет место при падении тела на поверхность Земли с небольшой высоты, то можно произведение r_1r_2 заменить r_2^2 и тогда

$$\gamma\frac{mM}{r_1} - \gamma\frac{mM}{r_2} = \gamma\frac{mM}{r_2^2}(r_2 - r_1) = mg(h_2 - h_1).$$

Работа в поле силы тяжести не зависит от формы пути, а зависит только от положения начальной и конечной точек пути. Поэтому работа, совершаемая по перемещению тела из B в C, как по пути s_1, так и по пути s_2 (рис. 5.5), будет одинаковой:

$$A_{s_1} = A_{s_2}.$$

Очевидно, что работа, совершаемая по тому же самому пути, но в обратном направлении

$$A'_{s_1} = -A_{s_1}.$$

Отсюда, если тело перемещается по замкнутому контуру, то работа

$$A = A_{s_2} + A'_{s_1} = 0.$$

Силы, характеризующие взаимодействия, в результате которых работа по замкнутому контуру равна нулю, называются консервативными. Механические системы, в которых действуют консервативные силы, называются консервативными системами. В консервативных системах нет перехода механического движения в другие формы движения или, наоборот, перехода других форм движения в механические.

5.4. Закон сохранения и превращения энергии в механике

Пусть в изолированной консервативной системе (например, тело – Земля) происходит перемещение одного из тел под действием внутренних сил (в данном случае – сил тяготения). Тогда изменение кинетической энергии тела будет равно работе, совершаемой при взаимодействии внутренних тел:

$$\mathrm{A} = \Delta \mathrm{E}_{\text{к}},$$

Эта работа согласно формулам предыдущего вопроса равна изменению потенциальной энергии системы, взятой со знаком минус. Поэтому:

$$\Delta E_к = -\Delta E_п.$$

Откуда $\Delta E_к + \Delta E_п = 0$ или $\Delta(E_к + E_п) = 0$.

Но если приращение какой-либо величины равно нулю, то это значит, что сама величина остается постоянной:

$$E_к + E_п = const.$$

Следовательно, *в изолированной консервативной системе механическая энергия может переходить из одного вида в другой и передаваться от одного тела к другому, но ее общее количество остается неизменным*.

Это утверждение и является **законом сохранения и превращения механической энергии**.

Если же система не является изолированной, но остаётся консервативной, то внешние тела будут производить работу над системой и тогда

$$A = \Delta E_к + \Delta E_п.$$

Если же система не консервативна, но изолирована, то в ней будет происходить переход механической энергии в другие виды энергии или переход других видов энергии в механическую, а потому механическая энергия сохранятся не будет. Так, например, в системе парашютист – Земля потенциальная энергия по мере опускания парашютиста убывает, но кинетическая этих тел не возрастает (как известно, парашютист опускается с постоянной скоростью). Здесь происходит переход механической энергии во внутреннюю энергию парашютиста и парашюта в результате трения о воздух.

Закон сохранения и превращение механической энергии не противоречит законам Ньютона. Наоборот, они находятся в полном соот-

ветствии друг с другом. Действительно равенство $A = \Delta E_к + \Delta E_п$ является просто другой формой записи равенства $A = mg(h - h_0) + \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$ предыдущего вопроса, которое было получено из второго закона Ньютона, написанного для рассматриваемого тела. Очевидно, что если проделать все выкладки в обратном направлении, то из равенства $A = \Delta E_к + \Delta E_п$ можно получить второй закон Ньютона. Математическая запись закона сохранения и превращения энергии отличается от равенства $A = \Delta E_к + \Delta E_п$ только тем, что работа, производимая внешними телами, будет равен нулю ($A = 0$). Поэтому закон сохранения и превращения энергии может быть получен из второго закона, написанного для случая, когда внешняя по отношению к рассматриваемой системе сила равна нулю. Очевидно, что, проделав все выкладки в обратном направлении, мы можем из закона сохранения и превращения энергии получить второй закон Ньютона для тела, находящегося в изолированной системе.

В связи с этим решение любой механической задачи можно осуществить двумя методами:

1) силовым (основные законы – законы Ньютона, основные понятия – сила, масса);

2) энергетическим (основной закон – закон сохранения и превращения энергии, основные понятия – энергия, работа).

При этом может оказаться, что одни задачи легче решаются силовым методом, а другие энергетическом. Необходимо учесть, что в случае механической системы сумма внутренних сил равна нулю, а поэтому из второго закона Ньютона, написанного для этой системы, определить их нельзя. Работа же внешних сил связана с изменением потенциальной энергии, поэтому внешние силы системы могут быть легко определены из закона сохранения и превращения энергии.

Мы уже говорили об условиях равновесия твёрдого тела. При этом мы пользовались силовым методом. Сформулируем условие устойчивого равновесия системы, пользуясь энергетическим методом.

Если изолированная система находится в равновесии, то всегда можно выбрать такую систему отсчёта, относительно которой скорости всех входящих в неё точек или тел будут равны нулю, т.е. их кинетическая энергия обратится в нуль. Для того, чтобы выйти из этого состояния тела системы должны получить кинетическую энергию. В

изолированной системе полная энергия постоянна, а поэтому кинетическая энергия может возрастать только за счёт уменьшения потенциальной. Если система находится в таком состоянии, что её потенциальная энергия минимальна, то переход потенциальной энергии в кинетическую невозможен, а, следовательно, система будет пребывать в этом состоянии неограниченно долго. Поэтому условием устойчивого равновесия системы является минимум потенциальной энергии.

В заключении необходимо отметить, что закон сохранения и превращения механической энергии есть лишь частный случай всеобщего закона сохранения и превращения энергии, согласно которому в изолированной системе энергия при всех изменениях форм движения материи остаётся постоянной с течением времени. Этот закон является одним из фундаментальных законов природы. Он справедлив для любых процессов, протекающих как в макромире, так и в микромире.

Так как энергия является универсальной мерой движения материи во всех её видах, то закон сохранения энергии является утверждением вечности и неуничтожимости движения в природе, которое лишь переходит из одной формы в другую.

5.5. Задачи

Методические указания (более подробно в п. 1.7): В задачах, в решении которых используются понятия и формулы механической энергии, механической работы, механической мощности, при раскрытии физического смысла приходится говорить в той или иной мере о механическом движении, о механическом взаимодействии, а при применении закона сохранения и превращения механической энергии – объединять взаимодействующие тела в систему, раскрывая при этом природу внутренних сил с тем, чтобы можно было говорить не только о замкнутости (незамкнутости) системы тел, но ещё о её консервативности (неконсервативности).

При выполнении чертежа задач этой темы, исходя из текста задачи и её физического смысла, надо использовать рекомендации к чертежам задач предыдущих тем; дополнением, иногда, является изображение уровня нулевой потенциальной энергии в однородном поле тяготения Земли.

5.5.1. Примеры решения задач

5.1. Паровоз тянет поезд массой 2000 т. Принимая, что мощность паровоза постоянна и равна 1800 кВт и что коэффициент сил трения равен $5{,}0 \cdot 10^{-3}$, определить: а) ускорение поезда в те моменты времени, когда скорость поезда равна 4,0 м/с и 12 м/с, б) максимальную скорость поезда.

СИ

$m = 2{,}000 \cdot 10^6$ кг

$N = 2{,}000 \cdot 10^6$ Вт

$k = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$

$v_1 = 4{,}0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

$v_2 = 12 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

$a_1 - ?$

$a_2 - ?$

$v_{max} - ?$

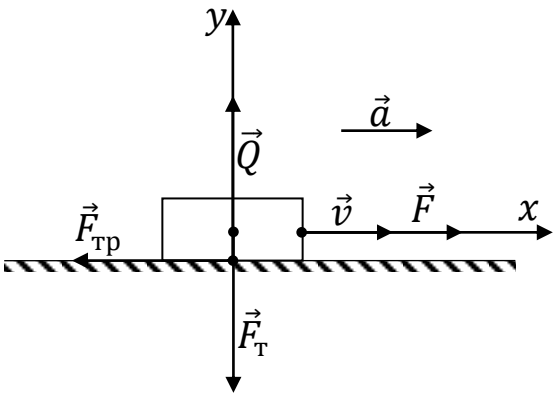


Рис. 5.6

В инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, рассматривается поступательное прямолинейное движение поезда с ускорением при отходе от ж.д. станции. На поезд действуют силы: со стороны паровоза сила тяги $\vec{F}$, со стороны Земли сила тяжести $\vec{F}_T$, со стороны ж.д. полотна сила нормальной реакции опоры $\vec{Q}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$.

На рис 5.6 изображено: тело отсчета – Земля штриховкой, поезд – прямоугольником, названные выше силы, векторы ускорения и скорости поезда $\vec{a}$, $\vec{v}$, оси координат X и Y.

$$ma_X = F_{TX} + Q_X + F_X + F_{тр\,X}\ (1),\ a_x = a,$$

$$F_{TX} = 0,\ Q_x = 0,$$

$$F_X = F,\ F_{трX} = -F_{тр},$$

$$ma_Y = F_{TY} + Q_Y + F_Y + F_{тр\,Y}\ (2),\ a_y = 0,$$

$$F_{TY} = -F_T,$$

$$F_T = mg\ Q_y = Q,$$

$$F_Y = 0,\ F_{трY} = 0$$

$$N = F\upsilon\ (3),\ F_{тр} = kQ\ (4),$$

$$при\ \upsilon = \upsilon_1,\ a = a_1,$$

$$при\ \upsilon = \upsilon_2,\ a = a_2,$$
$$при\ a = 0,\ \upsilon = \upsilon_{max}$$

В системе уравнений уравнения (1), (2) – это формула второго закона Ньютона для поступательного движения твердого тела в проекции на декартовы оси координат X и У, в них справа фигурируют проекции сил, действующих на поезд при движении (значения их проекций записаны рядом); формула (3) связывает мощность паровоза N с развиваемой им силой тяги и скоростью (из нее следует, что при разгоне поезда – отхода его от ж.д. станции – по мере увеличения скорости движения поезда сила тяги паровоза уменьшается (при N=const); и, как следует из уравнения (1), будет уменьшаться ускорение поезда и, когда оно обратится в ноль, скорость поезда станет максимальной, движение поезда - движением по инерции ($F=F_{тр}$)), формула (4) выражает закон Амонтона-Кулона.

$$a = \frac{N - kmg\upsilon}{m\upsilon},\ \upsilon_{max} = \frac{N}{kmg}$$

$$a_1 = \frac{1{,}800\cdot10^6\ \frac{кгм^2}{c^3} - 5{,}0\cdot10^{-3}\cdot2{,}000\cdot10^6\ кг\cdot9{,}8\ \frac{м}{c^2}\cdot4{,}0\ \frac{м}{c}}{2{,}000\cdot10^6\ кг\cdot4{,}0\ \frac{м}{c}} = 0{,}18\ \frac{м}{c^2},$$

$$a_2 = 0{,}026\ м/c^2,$$

$$\upsilon_{max} = \frac{1{,}800\cdot10^6\ \frac{кгм^2}{c^3}}{5{,}0\cdot10^{-3}\cdot2{,}000\cdot10^6\ кг\cdot9{,}8\ \frac{м}{c^2}} = 18\frac{м}{c}\ .$$

5.2. Какую работу надо совершить, чтобы из колодца глубиной 10 м равномерно поднять ведро массой 8,5 кг на тросе массой 4,0 кг?

СИ
$h = 10м$
$m_1 = 8{,}5кг$
$m_2 = 4{,}0кг$
$A-?$

В инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, рассматривается поступательное прямолинейное равномерное движение ведра и троса по вертикали вверх. При этом движении сила, действующая на верхний конец троса (например, со стороны человека, подни-

мающего ведро) совершает работу, которую можно разделить на две части:

1) работу по подъему ведра (при этом работу будет совершать постоянная сила, которая по второму закону Ньютона по модулю будет равна модулю силы тяжести ведра),

2) работу по подъему троса (при этом работу будет совершать переменная сила, так как по мере подъема ведра уменьшается длина троса и, следовательно, сила, совершающая работу по подъему троса, в каждый момент времени равна по модулю уменьшающейся силе тяжести укорачивающегося троса).

$A = A_1 + A_2$,

$A_1 = F_1 h$ (1),

$F_1 = F_{T1}$,

$F_{T1} = m_1 g$,

$A_2 = \int_0^h F_2 dl$ (2),

$F_2 = F_{T2}$, (3),

$F_{T2} = \rho S l g$ (4)

В системе уравнений A – работа по подъему ведра и троса, A_1 – работа по подъему ведра, A_2 – работа по подъему троса, формула (1) – формула работы постоянной силы $\vec{F}_1$ при перемещении точки ее приложения по направлению силы, формула (2) – формула работы переменной силы $\vec{F}_2$, модуль которой, как следует из формул (3) и (4), зависит от переменной величины l – длины остающегося с поднимаемым ведром отрезка троса; в формуле (4) ρ – плотность вещества троса, S – площадь его поперечного сечения.

$$A_1 = \int_0^h \rho S l g dl = \rho S g \frac{l^2}{2}\Big|_0^h = \rho S l g \frac{l}{2}\Big|_0^h = m_2 g \frac{h}{2},$$

$$A = (m_1 + \frac{1}{2} m_2) g h,$$

$$A = (8,5 \ \ кг + \frac{1}{2} \cdot 4,0 \ \ кг) \cdot 9,8 \ \ \frac{м}{с^2} \cdot 10 \ \ м = 1,0 \cdot 10^3 \ \ Дж$$

5.3. Какую работу надо совершить, чтобы столб, лежащий на земле, поставить вертикально? Масса столба 100 кг, длина столба 10 м.

СИ

$l = 10$м

$m = 100$кг

$A-?$

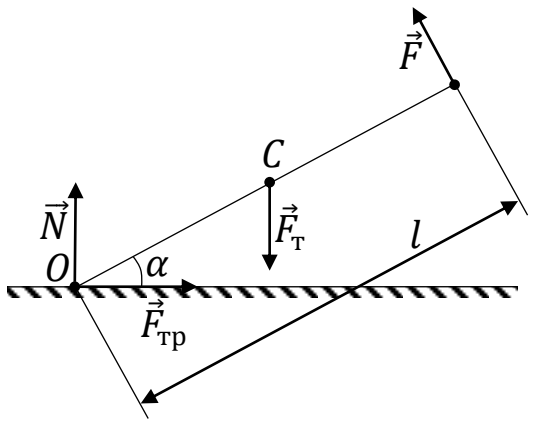


Рис. 5.7

В инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, рассматривается вращательное движение столба вокруг оси, проходящей через его нижний конец – точку *O*, перпендикулярно его длине (будем считать, что вращательное движение столба является равномерным). При этом движении совершается работа (которую надо определить в задаче) переменным моментом силы $\vec{F}$, действующей на другой конец столба в точке *B* перпендикулярном направлении к длине столба.

На рис. 5.7 изображено: штриховкой тело отсчета – Земля, столб отрезком длиной *l*, сила тяжести $\vec{F}_T$ столба, действующая на столб со стороны Земли вертикально вниз и приложенная в центре масс столба в точке *C*, которая находится посередине столба в предположении его однородности и одинаковости поперечного сечения столба, сила $\vec{F}$, действующая на верхний конец столба в точке *B* со стороны подъемного устройства, угол α, образованный поверхностью Земли и столбом, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$, действующая на столб со стороны Земли в точке О столба в вертикальном направлении вверх, сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$, действующая на столб со стороны Земли на нижний конец столба в точке *O* горизонтально в направлении, противоположном движению, в которое конец столба *O* стремится прийти относительно опоры.

$$A = \int_0^{\pi/2} M d\alpha \ (1),$$

$$M = Fl \ (2),$$

$$0 = Fl - mg\frac{l}{2}\cos\alpha \ (3)$$

В системе уравнений формула (1) дает значение работы переменного момента силы, формула (2) – значение этого переменного момента силы $\vec{F}$ относительно оси, проходящей через нижний конец столба, в ней F – модуль силы $\vec{F}$, l – ее плечо относительно указанной оси, уравнение (3) следует из уравнения вращательного движения тела вокруг неподвижной оси при отсутствии при этом движении углового ускорения (оно записано в проекции на координатную ось, проходящую через точку O перпендикулярно плоскости чертежа в направлении от чертежа; моменты сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ относительно указанной оси равны нулю).

$$A = \int_0^{\pi/2} mg\frac{l}{2}cos\,\alpha\,d\alpha = mg\frac{l}{2}sin\,\alpha|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}mgl$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot 100\ \ кг\cdot 10\ \ м\cdot 9,8\ \ \frac{м}{с^2} = 5,0\cdot 10^3\ \ Дж.$$

Примечание: Другой способ решения задач 5.1 и 5.2 основан на применении закона сохранения и превращения механической энергии, так как систему тел, состоящую из Земли и взаимодействующих с ней тел (ведра, троса, бревна) можно считать консервативной, но не замкнутой, изменение энергии которой будет равняться совершаемой внешними силами работе (сила трения покоя в задаче 5.2 на консервативность системы не влияет, так как она не совершает работы из-за отсутствия перемещения точки ее приложения).

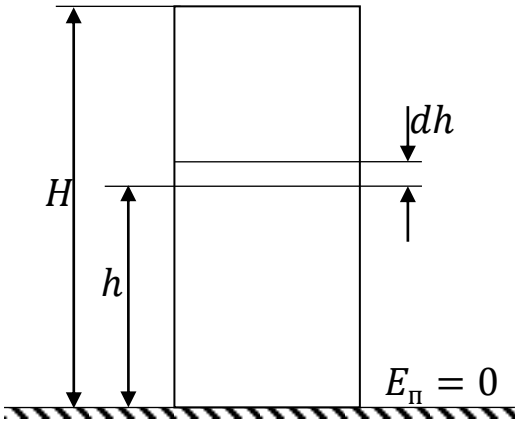


Рис. 5.8

Для решения задач указанным способом надо располагать формулой потенциальной энергии в однородном поле тяготения тела, линейными размерами которого по вертикали пренебречь нельзя (трос,

столб). Такую формулу можно получить с использованием формулы потенциальной энергии материальной точки ($\varepsilon_n = mgh$) в однородном поле тяготения, деля тело на материальные точки параллельными горизонтальными плоскостями, находящимися на малом расстоянии dh друг от друга (рис. 5.8). Потенциальная энергия произвольной материальной точки тела массой dm, находящейся на высоте h от уровня нулевой потенциальной энергии равна $dmgh$, где $dm = \rho Sdh$ (ρ – плотность вещества тела, S – площадь поперечного сечения вертикально расположенного тела). Потенциальная энергия всего тела будет равна сумме потенциальных энергий отдельных (всех) его материальных точек.

$$\varepsilon_n = \int_0^H \rho gShdh = \rho Shg\frac{h}{2}\Big|_0^H = mg\frac{H}{2}$$

В задаче 5.1 работа внешних сил A будет равна увеличению потенциальной энергии ведра (ΔE_{n1}) и троса (ΔE_{n2}) при их подъеме.

$$\Delta E_{n1} = E_{n1} - E_0,$$

$$\Delta E_{n2} = E_{n2} - E_0$$

На поверхности воды в колодце выбираем уровень нулевой потенциальной энергии для ведра, для троса – на уровне его центра масс в начале подъема ($E_0 = 0$ для обоих тел).

Итак, $A = \Delta E_{n1} + \Delta E_{n2} = m_1gh + m_2gh/2$.

В задаче 5.2 работа момента внешней силы равна увеличению потенциальной энергии столба $A = E_n - E_0$; если уровень нулевой потенциальной энергии проходит через точку O (рис. 5.8), то

$$A = mgl/2$$

$$(E_n = mgl/2,\ E_0 = 0).$$

5.4. Товарный вагон массой 31 т, двигаясь в тупике со скоростью 40 см/с, наталкивается своими буферами на два упора. Буфера заметно сжимаются, а упоры почти не деформируются. Пружина каждого буфера сжимается под действием силы $1{,}0 \cdot 10^7$ Н на 7,0 мм. Удар вагона о буфера можно считать упругим. На сколько сожмутся пружины буферов в рассматриваемом случае?

СИ
$x = 7{,}0\text{мм} = 7{,}0 \cdot 10^{-3}\text{м}$
$m = 31\text{т} = 31 \cdot 10^{3}\text{кг}$
$F = 1{,}0 \cdot 10^{7}\text{Н}$
$v = 40\,\frac{\text{см}}{\text{с}} = 0{,}40\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$
$\Delta l - ?$

В инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, рассматривается взаимодействие тел: Земли, вагона, пружин буферов и упоров при остановке вагона за время удара об упоры. Эта система тел замкнута и консервативна (силами трения пренебрегаем; внутренние силы тяготения и упругости являются консервативными). Поэтому во время удара полная механическая энергия системы тел по величине остается неизменной, что позволяет приравнять механическую энергию системы тел к началу удара механической энергии к концу удара. Будем считать ж.д. полотно в тупике станции горизонтальным. Поэтому потенциальная энергия вагона в поде тяготения Земли при ударе не меняется. Значит можно утверждать, что кинетическая энергия вагона будет полностью переходить в потенциальную энергию двух упруго-сжатых пружин буферов.

$E_к = E_п$, (1),

$E_к = \frac{mv^2}{2}$(2),

$E_п = 2\frac{k\Delta l^2}{2}$ (3),

$F = kx$ (4)

В системе уравнений формула (1) выражает закон сохранения и превращения механической энергии для замкнутой консервативной системы тел, формула (2) дает значение кинетической энергии поступательно движущегося твердого тела, формула (3) выражает потенциальную энергию упругого деформации двух пружин, формула (4) является формулой закона Гука. В этих формулах: m – масса вагона, v – модуль его линейной скорости, k – коэффициент жесткости пружины, Δl – ее сжатие при ударе, F – модуль силы, вызывающей абсолютное сжатие одной пружины буфера на x.

$$\Delta l = \sqrt{\frac{mv^2x}{2F}}$$

$$\Delta l = \sqrt{\frac{31 \cdot 10^3 \ \ кг \cdot (0,4 \ \ \frac{м}{с})^2 \cdot 7,0 \cdot 10^{-3} \ \ м}{2 \cdot 1,0 \cdot 10^7 \ \ \frac{кгм}{с^2}}} = 4,2 \cdot 10^{-2} \ \ м$$

5.5. Шар, радиус которого 3,0 см, катится без скольжения по горизонтальному полу и останавливается через 2,0 с, пройдя расстояние 70 см. Определить коэффициент трения качения, считая его постоянным.

СГС
$r = 3,0$ см
$t = 2,0$ с
$l = 70$ см

$\kappa_к$—?

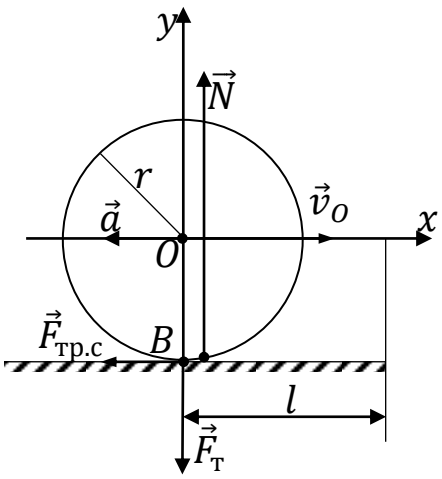


Рис. 5.9

В инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, рассматривается качение шара без скольжения по горизонтальному полу; при этом движении шар взаимодействует с Землей и полом, образуя систему тел: Земля – шар – пол, которая является замкнутой и неконсервативной (силы трения качения являются неконсервативными силами, а сила трения покоя, которая обусловливает качение шара, на консервативность системы тел не влияет). Поэтому в этой системе тел будет происходить убывание механической энергии, которая будет расходоваться на совершение работы по преодолению силы трения качения (работа по преодолению силы трения покоя не совершается). Убывает кинетическая энергия, а потенциальная (шар в поле Земли) остается без изменения.

На рис. 5.9 изображено: штриховкой тело отсчета Земля и пол, окружностью радиусом r – шар, действующие на шар силы: сила тяжести $\vec{F}_T$ со стороны Земли, приложенная в точке O и направленная

вертикально вниз, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ со стороны пола, приложенная к шару в точке A, немного вынесенной вперед по сравнению с точкой B соприкосновения шара с полом, вектор начальной скорости центра масс шара $\vec{\upsilon}_0$, вектор ускорения центра масс шара $\vec{a}$, оси координат OX и OY, пройденный шаром путь l до остановки.

$\Delta E_к = A$ (1),

$\Delta E_к = E_к - E_{к0}$, $E_к = 0$,

$E_{к0} = \frac{m\upsilon_0^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$ (2)

$I = 0{,}4mr^2$,

$\upsilon_0 = \omega_0 r$ (3),

$A = M_k\varphi$ (4),

$M_к = к_к N$ (5),

$L = \varphi r$ (6),

$0 = F_T + N$ (7),

$F_T = mg$,

$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t$ (8),

$\upsilon_x = 0$, $\upsilon_{0x} = \upsilon_0$, $a_x = -a$,

$x = x_0 + \upsilon_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$ (9),

$x = l$, $x_0 = 0$

В системе уравнений формула (1) следует из разобранного выше физического смысла задачи ($\Delta\varepsilon_к$ – убыль кинетической энергии шара, A – работа по преодолению трения качения), формула (2) дает начальное значение кинетической энергии катящегося шара, состоящей из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращательного движения (качение шара рассматриваем состоящим из поступательного движения со скоростью центра масс и вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс), формулы (3) и (6) связывают линейные и угловые кинематические величины катящегося без скольжения шара, в которых r является расстоянием от центра масс шара до опоры, формула (4) выражает работу постоянного момента силы при угловом перемещении φ, формула (5) подтверждает, что модуль момента сил трения качения постоянен (по условию задачи коэффициент трения качения $к_к$ постоянен), формула (7) является проекцией второго закона Ньютона для поступательного движения шара на ось OY, кинематические формулы (8) и (9) являются проекциями вектора мгновенной скорости и вектора перемещения центра масс шара при его движении с постоянным ускорением на ось OX, равенства, записанные после формул (8) и (9) являются их расшифровкой (за начальный момент времени принят момент начала качения шара, а начало координат совместили с положением центра масс шара в начальный момент времени).

$$к_к = \frac{2{,}8rl}{t^2 g},$$

$$\kappa_к = \frac{2{,}8 \cdot 3{,}0 \quad см \cdot 70 \quad см}{(2{,}0 \quad с)^2 \cdot 980 \ \frac{см}{с^2}} = 0{,}15 \quad см.$$

5.6. На какое расстояние от поверхности Земли удалилось бы тело, брошенное вертикально вверх со скоростью 5,0 км/с, если бы атмосфера у Земли отсутствовала?

СИ

$$v = 5{,}0\,\frac{км}{с} = 5{,}0 \cdot 10^3\,\frac{м}{с}$$

$$M = 5{,}96 \cdot 10^{24} кг$$

$$R = 6{,}37 \cdot 10^6 м$$

h–?

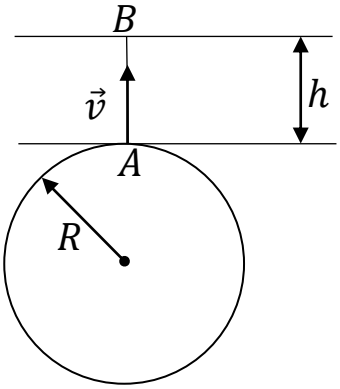


Рис. 5.10

В инерциальной системе отсчета, связанной с Солнцем, рассматривается взаимодействие брошенного тела и Земли. При движении тела (материальной точки) вертикально вверх будет меняться как взаимная потенциальная энергия системы: Земля – тело, так и кинетическая энергия, фактически, только одного тела. Так как по условию задачи сопротивлением движению тела в атмосфере Земли можно пренебречь, то полная механическая энергия системы Земля – тело для двух положений тела в точке *A* (у поверхности Земли) и в точке *B* (на высоте h над поверхностью Земли) будет одинаковой (по закону сохранения и превращения механической энергии). В точке *B* тело на мгновение останавливается.

На чертеже изображена Земля окружностью радиусом *R*, высота подъема тела h и его начальное и конечное положение точками *A* и *B*, начальная скорость тела $\vec{v}_0$.

$E_{ка} + E_{па} = E_{кв}$ (1),

$E_{ка} = \frac{mv^2}{2}$ (2),

$E_{па} = -\gamma\frac{mM}{R}$ (3),

$E_{пв} = -\gamma\frac{mM}{R+h}$ (4).

В системе уравнений формула (1) следует из сказанного в физическом смысле, в ней $E_{ка}$ – кинетическая энергия тела в точке *A*, $E_{па}$, $E_{кв}$ – потенциальная энергия тела в центральном поле тяготения Земли

в точках A и B. В этих формулах m – масса тела (материальной точки), M – масса земного шара и его радиус R, γ – гравитационная постоянная.

$$h = \frac{v^2 R^2}{2\gamma M - v^2 R},$$

$$h = \frac{(5{,}0 \cdot 10^3 \ \frac{м}{с})^2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6 \ м)^2}{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \ \frac{м^3}{кг \cdot с^2} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{24} \ кг - (5{,}0 \cdot 10^3 \ \frac{м}{с})^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \ м} = 1{,}6 \cdot 10^6 \ м$$

5.5.2. Задачи для самостоятельного решения

5.7. Найти потенциальную $E_{п1}$ и кинетическую $E_{к1}$ энергии тела массой $m = 5$ кг, падающего свободно с высоты $H = 10$ м, на расстоянии $h = 4$м от поверхности земли.

5.8. Тело массой $m = 5$ кг падает свободно с высоты $H = 12$ м. Найти изменение его потенциальной энергии $\Delta E_п$ через $t = 0{,}5$с после начала падения. Начальная скорость $v_0 = 0$.

№5.9. Снаряд, получивший при выстреле начальную скорость $v_0 = 300\frac{м}{с}$, летит вертикально вверх. На какой высоте h его кинетическая энергия $E_к$ станет равна потенциальной $E_п$? Сопротивлением пренебречь.

5.10. Чему равны значения потенциальной $E_п$ и кинетической энергии камня массой $m = 1$кг, брошенного вертикально вверх со скоростью $v_0 = 10\frac{м}{с}$ через $t = 1$с после броска? Сопротивление не учитывать.

5.11. С какой начальной скоростью v_0 нужно бросить мяч с высоты $h = 1$м, чтобы он после абсолютно упругого удара подпрыгнул на высоту $H = 1{,}5$м? Сопротивлением пренебречь.

5.12. Под каким углом α к горизонту вылетел снаряд из ствола орудия со скоростью $v_0 = 600\frac{м}{с}$, если его масса равна $m = 3$кг, а кинетическая энергия в высшей точке $E_к = 270$кДж. Чему равна потенциальная энергия $E_п$ в этой точке? Сопротивлением пренебречь.

5.13. Шарик массой $m = 500$г висит на нити длинной $l = 1$м. На какую предельную высоту h_{max} его можно отвести от положения равновесия, чтобы при свободных колебаниях шарика нить не оборвалась, если предельное натяжение, которое она может выдержать, $F_{max} = 10$Н? Какова будет кинетическая энергия шарика $E_к$ в низшей точке траектории? Сопротивлением пренебречь.

5.14. Тело массой m брошено горизонтально со скоростью v_0. Найти кинетическую энергию этого тела $E_к$ через t секунд после броска. Сопротивлением воздуха пренебречь.

5.15. Человек вращает камень, привязанный к шнуру длинной $l = 0{,}6$м, в вертикальной плоскости с частотой $\nu = 4\frac{об}{с}$. На какую высоту H взлетит камень, если шнур оборвется в тот момент, когда скорость камня направлена вертикально вверх? Сопротивлением пренебречь.

5.16. Металлическая цепочка состоит из звеньев длинной l каждое. Ее положили на идеально гладкий стол так, что конец цепочки свесился с края стола (рис. 5.11) Из скольких звеньев N состоит цепочка, если в момент когда последнее звено соскальзывало со стола скорость звена, расположенного посередине, стала равна v?

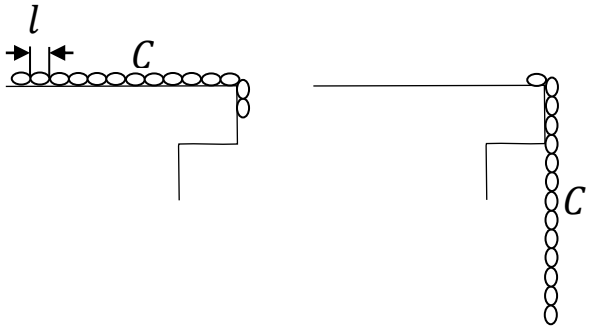


Рис. 5.11

5.17. Тело, соскальзывая с некоторой высоты по наклонному желобу, делает «мертвую петлю» в вертикальной плоскости (рис. 5.12). Радиус петли R. С какой высоты H оно должно соскользнуть, чтобы не сорваться в верхней точке петли. Трение не учитывать.

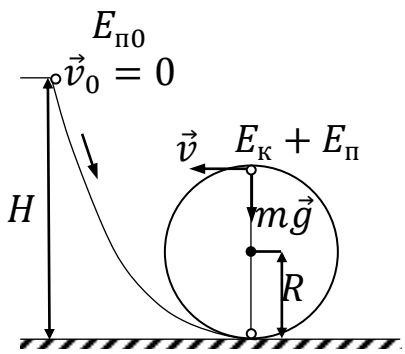


Рис. 5.12

5.18. Небольшое тело соскальзывает с вершины полусферы радиусом R (рис. 5.13). На какой высоте h тело сорвется с поверхности полусферы? Трение не учитывать.

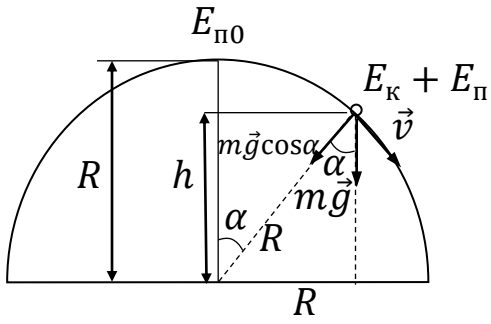


Рис. 5.13

5.19. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы кубик массой m с длинной ребра l перевернуть с одной грани на другую? Сопротивлением пренебречь.

5.20. Тело брошено свободно вертикально вверх. Постройте графики зависимости от времени следующих величин: координата, ускорение, импульс, потенциальная энергия, кинетическая энергия, полная механическая энергия.

5.21. С какой скоростью вылетает из пружинного пистолета шарик массой $m = 200$г, если пружина сжата на $x_0 = 8$см. Известно, что для сжатия пружины на $x = 10$см требуется сила $F = 5$Н.

5.22. Пружина пистолета в недеформированном состоянии имеет длину l_0. Для сжатия пружины на x к ней необходимо приложить силу F. На какую высоту H поднимется пуля массой m при выстреле из этого пистолета вертикально вверх, если при зарядке длина сжатой пружины равна l?

5.23. Ядро атома, имевшее кинетическую энергию $E_{к0}$, распалось на два осколка равной массы, которые разлетелись со скоростями v_1 и v_2. Под каким углом α друг к другу разлетелись осколки, если их общая кинетическая энергия после распада стала равна $E_к$?

5.24. Снаряд при вылете из орудия обладает кинетической энергией относительно Земли $E_{к\,сн} = 4$кДж. Какова кинетическая энергия снаряда $E_{к\,отн}$ относительно орудия, если масса снаряда $m = 4$ кг, а масса орудия $M = 4$ т? Какова кинетическая энергия орудия $E_{к\,ор}$ относительно Земли?

5.25. В покоящийся на горизонтальной поверхности клин с острым углом $\alpha = 45°$ и массой M попадает горизонтально летящий шарик и, абсолютно упруго ударившись о поверхность клина, отскакивает вертикально вверх, а клин начинает скользить по поверхности без трения (рис. 5.14). С какой скоростью v_1 отскочит шарик, если его скорость до удара была равна v_0, а масса шарика m?

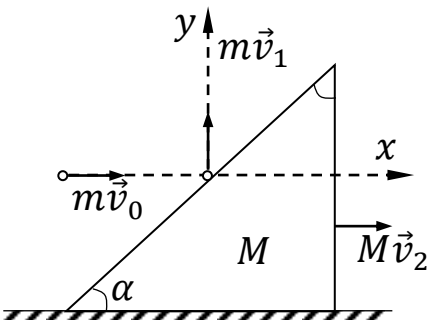


Рис. 5.14

5.26. Шар массой $m = 1$ кг катится без скольжения, ударяется о стенку и откатывается от нее. Скорость шара до удара о стенку $v = 10\ \frac{см}{с}$, после удара $u = 8\ \frac{см}{с}$. Найти количество теплоты Q, выделившееся при ударе шара о стенку.

5.27. Найти кинетическую $E_к$ энергию велосипедиста, едущего со скоростью $v = 9\ \frac{км}{ч}$. Масса велосипедиста вместе с велосипедом $m = 78$ кг, причем на колеса приходится масса $m_0 = 3$ кг. Колеса велосипеда считать обручами.

5.28. Мальчик катит обруч по горизонтальной дороге со скоростью $v = 7{,}2\ \frac{км}{ч}$. На какое расстояние s может вкатиться обруч на горку за счет его кинетической энергии? Уклон горки равен 10 м на каждые 100 м пути.

Глава 6. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

6.1. Гармонические колебания

Определение. *Колебанием* называется всякое движение или изменение состояние, при котором физические величины, характеризующие это движение или состояние, изменяясь, повторяются со времени.

Так, например, периодически повторяются скорости движения маятника часов, напряжение и ток в цепи переменного тока, напряженность электрического поля между обкладками конденсатора в колебательном контуре и т.п.

В зависимости от физической природы колебания бывают механическими, электрическими, электромагнитными и т.д.

Вне зависимости от своей природы различного рода колебания подчиняются одним и тем же законам, математические методы их исследования едины. Поэтому основные законы механических колебаний будут использованы при изучении других видов колебаний в последующих разделах курса физики.

Определение. *Периодические колебания* – колебания, значения характеризующих физических величин которых повторяются через равные промежутки времени.

Простейший вид периодических колебаний: гармонические колебания.

Определение. *Гармонические колебания* – такие колебания, при которых смещение от положения равновесия колеблющихся точек или тел изменяется по закону синуса или косинуса.

Пусть произвольный радиус-вектор равномерно вращается вокруг точки О с угловой скоростью ω. Проекция конца этого вектора на любой из диаметров будет совершать колебания (рис. 6.1).

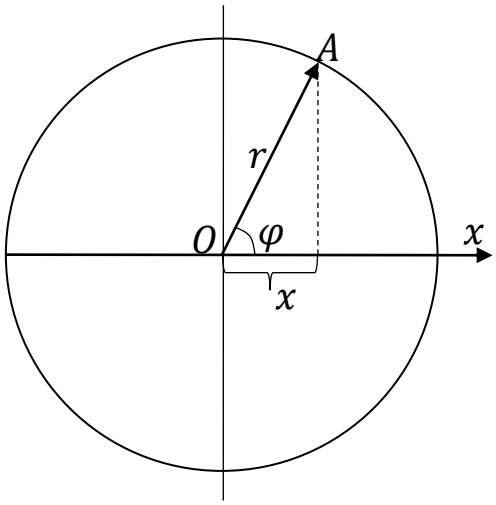


Рис. 6.1

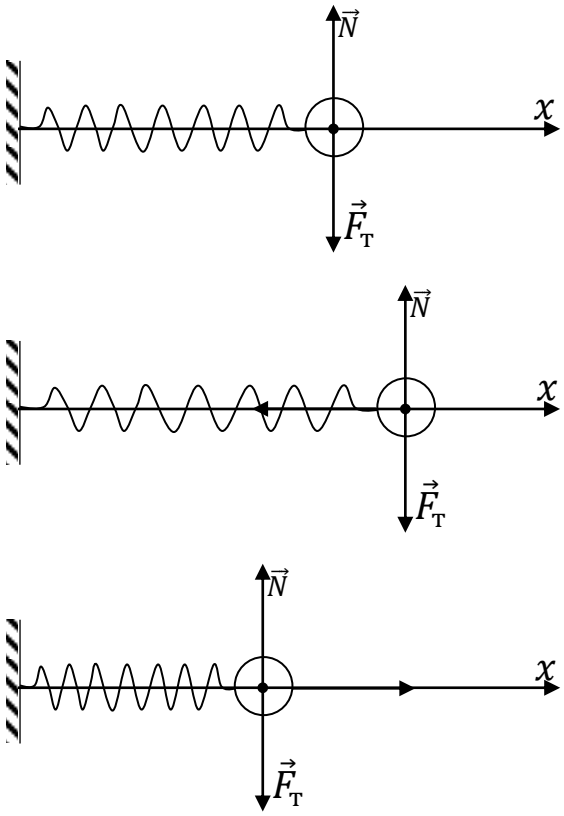


Рис. 6.2

Угол поворота радиуса-вектора можно определить, как

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

где φ_0 – начальное значение угла φ, в момент времени равный нулю.

Изменение координаты x точки A будет:

$$x = r\cos\varphi = r\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Следовательно, проекция на ось точки, равномерно обращающейся по окружности, совершает гармонические колебания. Величина x есть смещение колеблющейся точки от положения равновесия (в данном случае от положения O). Максимальная величина этого смещения $|x|_{max} = r$ называется амплитудой колебания. Угол $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, характеризующий положение точки в данный момент времени, называется фазой колебания или, коротко, фазой. Угол φ_0, характеризующий положение точки в начальный момент времени, называется начальной фазой.

<u>Определение.</u> Промежуток времени T, в течение которого совершается одно полное колебание, называется *периодом*.

<u>Определение.</u> Число колебаний за единицу времени называется *частотой*:

$$\vartheta = \frac{1}{T}$$

Угловая скорость вращения подвижного радиус-вектора $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Она показывает число колебаний, совершаемых за 2π единиц времени, и называется еще круговой или цикличной частотой.

Перейдем теперь к рассмотрению колебаний, совершаемых телами под действием сил. Вначале рассмотрим колебания, возникающие под действием упругой силы. Пусть на абсолютно гладкий горизонтальный стержень насажен шарик, который может двигаться по нему без терпения. Шар соединен со стенкой пружиной. Когда он находится в равновесии (рис. 6.2, а), то на него действует только вес и сила нормального давления, которые уравновешивают друг друга. Если шарик сдвинуть вправо, а затем отпустить (рис. 6.2, б), то он под действием упругой силы пружины начнет ускоренно двигаться к положению равновесия. При этом упругая сила начнет уменьшаться по величине, а поэтому и ускорение шара будет так же уменьшаться. Когда шар придет в положение равновесия, то на него будут действовать лишь уравновешенные силы $\vec{F}_{\text{т}}$ и $\vec{N}$. Однако, шар не остановится в положении равновесия, а за счет приобретенной кинетической энергии будет продолжать свое движение влево (рис. 6.2, в), сжимая пружину. С ростом силы $\vec{F}$ станет расти и ускорение, направленное в противоположную сторону скорости. Движение шара будет замедленным вплоть до его полной остановки. Затем шар начнет двигаться вправо и т.д.

Так как мы рассматриваем случай скольжения шара по стержню без трения, то его колебания происходят с постоянной амплитудой.

Колебания, происходящие в изолированной системе, называются *свободными*. Поскольку в системе шар-пружина внешние силы уравновешиваются, то рассматриваемые нами колебания будут свободны.

<u>Определение.</u> Колебания, которые совершает система около положения устойчивого равновесия после того, как она была выведена из состояния равновесия, носят название *собственных колебаний*.

Собственными они называются потому, что зависят только от параметров колеблющейся системы. Так как в рассматриваемой нами системе колебания шара происходят под действием упругой силы и

зависят, как мы в дальнейшем увидим, только от ее жесткости и массы шара, то они будут собственными. Покажем, что свободные собственные колебания, происходящие под действием упругих тел, является гармоническими.

Сила упругости пружины подчиняется закону Гука $F = -kx$, где x – смещение шара от положения равновесия.

С другой стороны, второй закон Ньютона в проекции на ось дает:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F, \text{ откуда } -\frac{kx}{m} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Обозначив $\frac{k}{m} = \omega^2$, окончательно получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

Данное дифференциальное уравнение имеет два решения:

$$x_1 = A\,sin(\varphi_0 + \omega t) \text{ и } x_2 = A\,cos(\varphi_0 + \omega t).$$

В справедливости этого можно убедиться прямой подстановкой. Так как смещение изменяется по закону синуса или косинуса, то, следовательно, колебания, происходящие под действием упругой силы, являются гармоническими.

Полученные нами решения дифференциального уравнения, которое можно назвать *уравнением гармонического колебательного движения*, отличаются только начальными фазами. Очевидно, что при разности их на $\frac{\pi}{2}$ оба решения дадут один и тот же результат. Начальная же фаза определяется лишь выбором начала отсчета времени. Так как колебания многократно повторяются, то выбор начала отсчета времени безразличен. Договоримся, что начало отсчета времени мы будем выбирать так, что решение дифференциального уравнения гармонического колебательного движения будет:

$$x = A\sin(\varphi_0 + \omega t).$$

Найдем *период упругих колебаний*, так как $T = \frac{2\pi}{\omega}$, а $\omega^2 = \frac{k}{m}$, то

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Мы видим, что период колебаний пружинного маятника зависит только от его массы и коэффициента упругости пружины, но не зависит от амплитуды колебаний.

6.2. Математический маятник и физический маятник

Определение. Под *математическим маятнико*м понимают материальную точку, подвешенную на нерастяжимой нити.

Другими словами, только подвешенное тело имеет массу и его расстояние от места подвеса не изменяется. Однако, мы можем считать маятник математическим, если масса тела много больше массы нити (тогда массой нити можно пренебречь) и длина нити много больше линейных размеров тела (тогда тело можно принять за материальную точку). Изменениями длины нити при колебаниях будем пренебрегать, так как они при достаточно жесткой нити незначительны.

На маятник действует вес и сила натяжения нити (рис. 6.3). Проведем ось τ касательную траектории.

Тангенциальное ускорение маятнику будет сообщать сила

$$F = F\ sin\ \alpha - mg \sin\alpha.$$

Но $\alpha = \frac{x}{l}$, где l – длина нити, а x – смещение маятника от положения равновесия.

Если угол α мал (не более 5°), то его синус можно считать равным самому углу, т.е. $\sin\alpha = \alpha$.

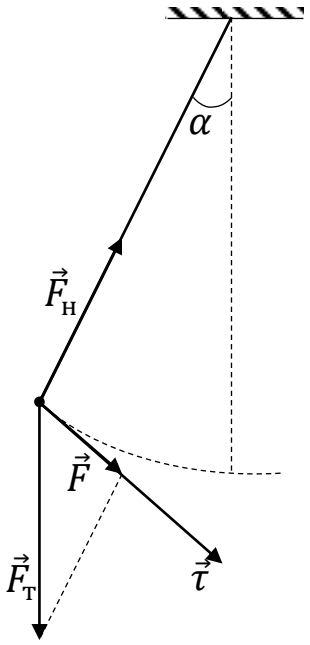


Рис. 6.3

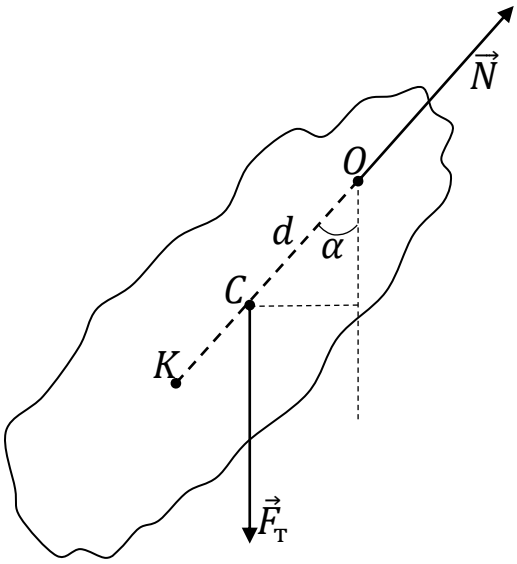


Рис. 6.4

Тогда $F = mg\frac{x}{l}$, но так как смещение отсчитывается от положения равновесия, то оно противоположно по направлению силе $\vec{F}$, которая всегда направлена к положению равновесия. Поэтому $F = -\frac{mg}{l}x$.

В связи с тем, что нить нерастяжима ($l = const$), все величины, стоящие перед x, постоянны. Заменив их через k, получим:

$$k = \frac{mg}{l}, F = -kx.$$

Мы видим, что для силы $\vec{F}$, которая не является по своей природе упругой, выполняется закон Гука, справедливый лишь для упругих сил. Силы, которые ведут себя как упругие, хотя по своей природе ими не являются, называются квазиупругими.

Так как колебания под действием силы, подчиняющийся законы Гука, являются гармоническими, то, следовательно, колебания математического маятника будут гармоническими, если угол его отклонения от положения равновесия мал.

Период колебания математического маятника можно найти, заменив в формуле периода упругих колебаний величину k только что найденным нами для нее выражением. После сокращения получим:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

<u>Определение.</u> *Физическим маятником* называют твердое тело, закрепленное на оси, не проходящей через его центр тяжести.

Найдем его период колебаний.

Движение математического маятника сводится движению материальной точки по криволинейной траектории под действием сил. Поскольку физический маятник является протяженным телом, поворачивающимся вокруг оси, то при рассмотрении его колебаний мы должны использовать законы вращательного движения твердого тела.

В данном случае возвращение тела (рис. 6.4), в положение равновесия (поворот его) происходит под действием момента силы тяжести

$$M = mgd\,sin\alpha,$$

при малых углах отклонения $sin\alpha = \alpha$, тогда

$$M = -mgd\alpha.$$

Знак минус взят потому, что момент силы тяжести поворачивает маятник в направлении, противоположном отсчету угла. Действительно, в положении, показанном на рис. 6.4, момент силы тяжести поворачивает маятник по ходу часовой стрелки, а отсчет угла производится против часовой стрелки.

Применив второй закон Ньютона для вращательного, движения твердого тела, получим:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mgd}{J}.$$

Все величины, стоящие в правой части равенства перед α, не зависят от α и при колебаниях данного маятника остаются постоянными. Обозначив постоянный коэффициент перед α через

$$\omega^2 = \frac{mgd}{J},$$

окончательно получаем:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0.$$

Это уравнение является уравнением гармонических колебаний. Следовательно, колебания физического маятника при малых углах отклонения от равновесия является гармоническими. *Период колебаний физического маятника*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}.$$

Сравнивая формулы для периодов колебаний математических маятников, мы видим, что физический маятник колеблется с тем же периодом, что и математический, имеющий длину

$$l_0 = \frac{J}{md}.$$

Длина математического маятника l_0, имеющего тот же период колебаний, что и данный физический, называется приведенной длиной данного физического маятника. Точка, находящаяся на расстоянии l_0 от оси вращения по линии, проходящей через центр тяжести, называется центром качания (точка *K* на рис. 6.4).

Точка *K* лежит дальше от оси, чем центр тяжести. Докажем это, по теореме Гюйгенса-Штейнера

$$J = J_c + md^2,$$

тогда

$$l_0 = \frac{J_c + md^2}{md} = \frac{J_c}{md} + d.$$

Так как все величины в выражении $\frac{l_c}{md}$ положительны, то

$$l_0 > d.$$

Не трудно заметить, что период колебаний как математического, так и физического маятников не зависит от их массы (в выражение для момента инерции входит масса в первой степени), амплитуды (для малых амплитуд) и начальной фазы.

6.3. Энергия гармонического колебательного движения

Вначале определим скорость и ускорение при гармоническом колебательном движении. Если колебания происходят вдоль оси *x*, то

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Скорость колеблющейся точки

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Ускорение колеблющейся точки

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) \text{ или } a = -\omega^2 x.$$

Пусть система совершает собственные гармонические колебания. При отсутствии сил трения полная энергия системы, которая складывается из кинетической и потенциальной, будет сохраняться.

Кинетическая энергия системы

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0),$$

но, так как $m\omega^2 = k$, то

$$E_{\text{к}} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0).$$

Потенциальная энергия системы

$$E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0).$$

Полная энергия системы

$$E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = \frac{1}{2}kA^2 \text{ или } E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2.$$

6.4. Затухающие колебания

В реальных случаях колебания, возникшие в результате какого-либо толчка, постепенно ослабевают, затухают. Происходит это потому, что при движении возникают силы трения и механическая энер-

гия колебательного процесса постепенно переходит во внутреннюю энергию окружающих тел.

Затухающие колебания, строго говоря, не гармоничны, так как их амплитуда не постоянна. Под амплитудой затухающих колебаний понимают максимальное смешение колеблющейся точки в течение одного периода. При затухающих колебаниях амплитуда убывает со временем. Закон убывания амплитуды зависит от характера сил трения, действующих на колеблющуюся точку.

Затухающие колебания не являются периодическим процессом, так как характеризующие его физические величины не повторяются точно (например, смещение, скорость). В связи с этим к ним, строго говоря, не применим и термин «период». Только в случае малых сил трения можно условно говорить о периоде. Под периодом затухающих колебаний понимают промежуток времени между двумя последовательным прохождениями системы через положения равновесия в одном и том же направлении или промежуток времени между двумя последовательными максимальными отклонениями в одну и ту же сторону. Силы трения замедляют движение, а поэтому период затухающих колебаний всегда больше периода колебаний той же системы при отсутствии трения. Однако эти периоды можно считать равными, если трение мало.

Рассмотрим случай, когда точка совершает прямолинейные колебания в вязкой среде. При малых скоростях движения сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости:

$$F_c = -bv,$$

где b — коэффициент сопротивления.

Знак минус поставлен потому, что сила сопротивления направлена в сторону противоположную направлению скорости.

Уравнение движения колеблющейся точки будет:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = kx - b\frac{dx}{dt}..$$

Заменив $\frac{k}{m} = \omega^2$ и $\frac{b}{m} = 2\beta$, получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0.$$

Данное уравнение можно свести к уравнению гармонических колебаний, применив подстановку $x = ze^{\beta t}$.

Рис. 6.5

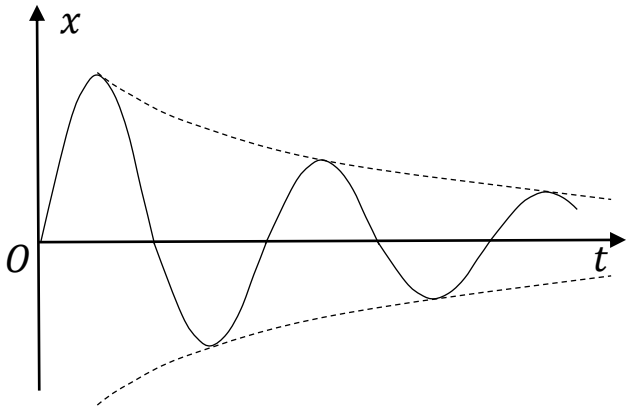


Рис. 6.6

Получим:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (\omega^2 - \beta^2)z = 0.$$

В уравнении гармонического колебательного движения коэффициент перед переменной величиной должен быть положительным. Поэтому ω должна быть больше β, то есть уравнение гармонических колебаний мы получим только в случае колебаний с малым сопротивлением. Если же колебания осуществляются при большом сопротивлении, то $\beta^2 > \omega^2$ и движение будет апериодическим – после отклонения будет происходить медленное возвращение к положению равновесия (рис. 6.5).

Заменим $\omega^2 - \beta^2 = \omega_0^2$, тогда решение полученного нами уравнения будет:

$$z = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ или } x = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Из уравнения видно, что амплитуда колебаний $A = A_0 e^{-\beta t}$ убывает с течением времени по экспоненциальному законе (рис. 6.6). Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}},$$

больше, чем в случае отсутствия сопротивления. При этом он является постоянной величиной (т.е. не изменяется с течением времени).

Быстрота затухания колебаний характеризуется логарифмическим декрементом затухания, которым называется величина равная натуральному логарифму отношения двух последовательных значений амплитуд, отстоящих друг от друга на промежуток времени, равный периоду.

Обозначив логарифмический декремент затухания через λ, получим:

$$\lambda = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T}.$$

Откуда $\lambda = \beta T$.

В ряде случаев необходимо по возможности быстрее погасить возникшие колебания (например, колебания стрелок электроизмерительных приборов, колебания кузова автомобиля при езде по неровной дороге потому подобное). Приспособления, позволяющие увеличить затухание колеблющейся системы, называются демпферами, или демпфирующими устройствами. В курсе физики средней школы рассматривалось воздушное демпфирующее устройство амперметра электромагнитной системы. Остановимся кратко на принципе действия автомобильного амортизатора. Когда колесо попадает на выпуклость дороги, то рессора сжимается, а затем подбрасывает кузов, что приводит его в колебания. Амортизатор представляет собой в первом приближении цилиндр, заполненный вязкой жидкостью, в котором может двигаться поршень с рядом мелких отверстий. Цилиндр соединен с колесом, а шток поршня с кузовом. Колебания поршня в цилиндре быстро затухают, так как поршень встречает на своем пути большое сопротивление со стороны продавливаемой через его отверстия жидкости.

6.5. Вынужденные колебания. Резонанс

Благодаря трению собственные колебания системы всегда будут затухающими. Для получения незатухающих колебаний необходимо действие переменной, так называемой *вынуждающей силы*. Возникающие при этом колебания называются *вынужденными*.

Разберем простейший случай возникновения вынужденных колебаний под действием силы, изменяющейся по закону синуса:

$$F_{\text{вын}} = F_0 \sin \omega_1 t.$$

Здесь F_0 есть амплитуда вынуждающей силы, т.е. максимальное её значение, а ω_1 – циклическая частота колебаний этой силы.

Уравнение движения колеблющейся точки в этом случае примет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_0 \sin\omega_1 t.$$

Обозначив $\frac{F_0}{m} = f$, получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f \sin\omega_1 t.$$

Общее решение такого неоднородного дифференциального уравнения равно сумме общего решения уравнения без правой части решения неоднородного уравнения, т. е.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

Общее решение уравнения без правой части мы получили в предшествующем параграфе. Оно соответствует затухающим колебаниям, амплитуда которых убывает со временем. Через достаточно большой промежуток времени после начала колебаний их амплитуда будет весьма небольшой. Поэтому, пренебрегая затухающими колебаниями системы, которые будут играть существенную роль только в начале процесса, можно искать решение уравнения в виде:

$$x(t) = x_2(t) = A\sin(\omega_1 + \varphi).$$

Вычислив первую и вторую производные от x по времени, подставим их значения в уравнение колебаний и, воспользовавшись тригонометрическими формулами для синуса и косинуса суммы, получим:

$$[(\omega^2 - \omega_1^2)A\cos\varphi - 2\beta\omega_1 A\sin\varphi -$$

$$-f]\sin\omega_1 t + [2\beta\omega_1 A\cos\varphi - (\omega_1^2 - \omega^2)A\sin\varphi]\cos\omega_1 t = 0.$$

Для выполнения этого равенства необходимо, чтобы коэффициенты при синусе и косинусе были равны нулю:

$$(\omega^2 - \omega_1^2)A\,cos\,\varphi - 2\beta\omega_1 A\,sin\,\varphi = f$$

$$2\beta\omega_1 A\,cos\,\varphi - (\omega_1^2 - \omega^2)A\,sin\,\varphi = 0.$$

Из второго уравнения легко можно найти сдвиг фазы между колебаниями системы и колебаниями вынуждающей силы:

$$tg\,\varphi = \frac{2\beta\omega_1}{\omega_1^2 - \omega^2}.$$

Для определения амплитуды вынужденных колебаний возведем оба уравнения в квадрат и сложим. Решая полученное равенство относительно A, найдем:

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2-\omega_1^2)^2+4\beta^2\omega_2^2}}.$$

Величины амплитуды и фазы вынужденных колебаний зависят от соотношения частот собственных и вынужденных колебаний. Очевидно, что при определенном соотношении частот амплитуда колебаний будет максимальной.

Определение. Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний носит название *механического резонанса*.

Найдем значение частоты, при которой возникает резонанс. Для этого нужно найти минимум выражения, стоящего под корнем в знаменателе. Продифференцировав это выражение по ω_1, мы получим:

$$-4(\omega^2 - \omega_1^2)\omega_1 + 8\beta^2\omega_1 = 0.$$

Отбросив решения $\omega_1 = 0$, а также отрицательное (частота не может быть отрицательной), находим для резонансной частоты

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2}.$$

Подставив это значение частоты в формулу амплитуды, получим выражение для амплитуды при резонансе:

$$A_{\text{рез}} = \frac{f}{2\beta\sqrt{\omega^2-\beta^2}}.$$

В случае отсутствия сопротивления среды амплитуда колебаний при резонансе обращается в бесконечность и резонанс наступает при совпадении частот собственных и вынужденных колебаний. В реальных условиях всегда существует сопротивление среды, а поэтому резонанс наступает, если частота вынуждающей силы близка к частоте собственных колебаний. По этой же причине значение амплитуды не возрастает безгранично.

На рис. 6.7 показаны резонансные кривые для случаев различных β:

$$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3.$$

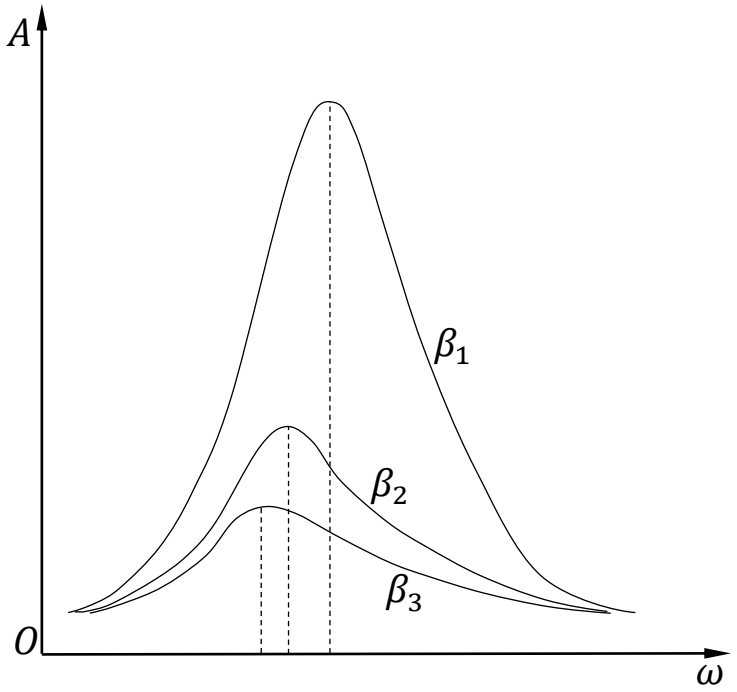


Рис. 6.7

Интересно отметить, что при стремлении ω_1 к нулю все кривые придут к одному и тому же значению, отличному от нуля:

$$A = \frac{f}{\omega^2} = \frac{F_0}{k}.$$

Величина A в этом случае представляет собой смещение от положения равновесия, которое получает система под действием постоянной силы F_0.

Явление резонанса широко используется в технике (например, в радиотехнике, акустике и т.д.). Его приходится учитывать при конструировании машин и различного рода сооружений. Вращающиеся части машин, валы, винты самолетов и кораблей невозможно абсолютно точно уравновесить. Они испытывают переменную нагрузку и совершают вынужденные колебания. Если частота свободных колебаний корпуса корабля или крыла самолета откажется близкой к частоте колебаний, возбуждаемых винтом, то может возникнуть катастрофа.

Возможность поддерживать незатухающие колебания представляет большой интерес для техники. Особенно широко применяемыми являются колебательные движения, возникающие и поддерживаемые за счёт постоянного, не колебательного источника энергии. Такие колебания называются автоколебаниями. При автоколебаниях система

сама регулирует поступление в нее извне энергии, необходимой для поддержания колебаний. Примерами автоколебаний являются колебания маятника часов (за счёт энергии спирали или гири), колебания в колебательном контуре радиопередатчика (за счёт энергии, например, аккумулятора), колебания молоточка в электрозвонке и т.п.

6.6. Сложение гармонических колебаний

В ряде случаев тело участвует одновременно в нескольких колебаниях. Так, например, колебания маятника в движущемся автобусе для наблюдателя на Земле будут складываться из колебаний автомобиля относительно Земли и колебаний маятника относительно автобуса.

Решение задачи сложение колебаний значительно упрощается, если представить себе амплитуду как вектор. Такое представление может быть вполне оправданным, если вспомнить, что гармонические колебания можно представить как колебания проекции конца радиуса-вектора при его равномерном вращении. В этом случае роль амплитуды выполняет радиус-вектор. На рис. 6.8 показано положение радиуса-вектора (амплитуды) в начальный момент времени. Смещение в начальный момент времени t может быть легко выражено через начальную фазу:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

1. Пусть нам нужно сложить два гармонических колебания одинакового направления и одинаковой частоты с различными начальными фазами:

$$x_1 = A_1\sin(\omega t + \varphi_1),$$
$$x_2 = A_2\sin(\omega t + \varphi_2).$$

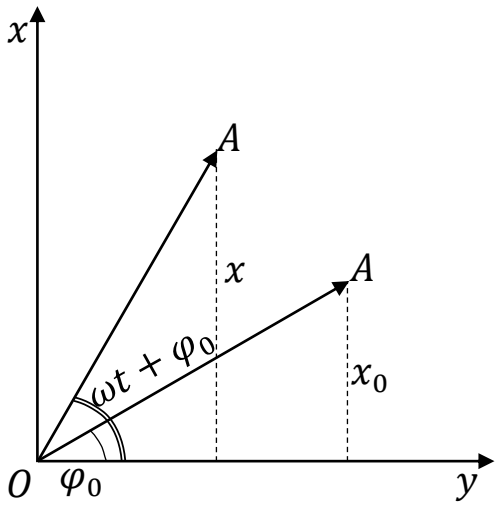


Рис. 6.8

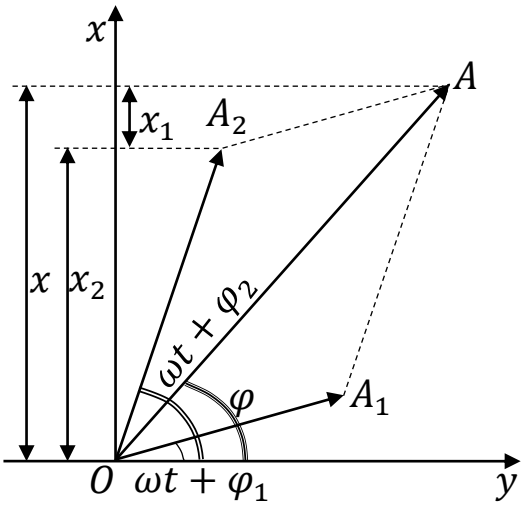


Рис. 6.9

Результирующие колебания будем искать в виде:

$$x = x_1 + x_2 = A\sin(\omega t + \varphi).$$

Для нахождения результирующей амплитуды и результирующей начальной фазы представим оба колебания с помощью векторной амплитуды (рис. 6.9). Из чертежа видно, что угол между A_1 и A_2 равен $\varphi_1 - \varphi_2$. Решая косоугольный треугольник, мы получаем:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Из чертежа видно, что:

$$tg\ \varphi = \frac{x_1+x_2}{y_1+y_2} = \frac{A_1 sin\varphi_1 + A_2 sin\varphi_2}{A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2}.$$

Рассмотрим случай сложения однонаправленных колебаний, у которых частоты мало отличаются друг от друга:

$$x_1 = A_1\sin(\omega t + \varphi_1),$$
$$x_2 = A_2\sin(\omega t + \varphi_2).$$

В этом случае:

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right) sin(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}).$$

Результирующее колебание, строго говоря, не является гармоническим. Однако, коэффициент перед синусом изменяется очень медленно, так как частота $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ мала в связи с тем, что ω_1 мало отличается от ω_2. это позволяет рассматривать результирующее колебание как почти гармоническое колебание с частотой $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, у которого амплитуда медленно изменяется со временем в пределах от *2A* до *0* (рис. 6.10).

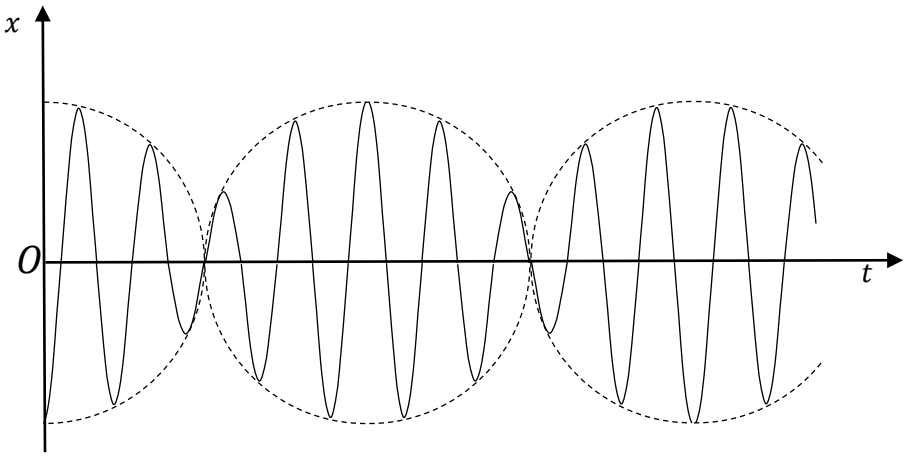


Рис. 6.10

Полученные колебания называются биениями, а период изменения амплитуды – период биения:

$$T_б = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}.$$

2. Рассмотрим сложение взаимно-перпендикулярных колебаний. Здесь интересны 3 частных случая.

I. Фазы колебаний одинаковы:

$$x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_0),$$
$$y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Поделив первое равенство на второе, получим:

$$x = \frac{A_1}{A_2} y.$$

Колебания точки будут проходить вдоль прямой. Проходящей через начало координат.

II. Фазы колебаний отличаются на π:

$$x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_0),$$
$$y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi) = -A_2 sin(\omega t + \varphi_0).$$

Колебания точки будет происходить вдоль прямой, проходящей через начало координат, но эта прямая будет проходить через другие координаты по сравнению с другим случаем.

III. Фазы колебания отличаются на $\frac{\pi}{2}$:

$$x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_0),$$
$$y = A_2 cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) = A_2 cos(\omega t + \varphi_0).$$

Откуда $\sin(\omega t + \varphi_0) = \frac{x}{A_1}$, $cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{y}{A_2}$.

Возведя полученные равенства почленно в квадрат и сложив, найдем, что:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

Колеблющаяся точка будет двигаться по эллипсу, полуоси которого равны соответствующим амплитудам колебаний. При равенстве амплитуд эллипс превращается в окружность.

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы, то траектория результирующего движения имеет вид сложных кривых, называемых фигурами Лиссажу. Вид этих кривых зависит от соотношения частот и начальных фаз складываемых колебаний.

При сложении гармонических колебаний может быть получено и не гармоническое колебание (например, биение). В связи с этим можно сложное колебание разложить на ряд простых. Это разложение, которое называется гармоническим анализом. Выполняется с помощью теоремы Фурье:

$$f(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) + \cdots$$
$$+A_n \sin(n\omega t + \varphi_n).$$

6.7. Механические волны

Если в упругой среде каким-либо способом вызвать колебание хотя бы одной ее точки, то в результате упругих взаимодействий придут в колебательные движения и соседние с ней частицы среды, т.е. область, в которой будут происходить колебания, начнет увеличиваться.

Определение. Процесс распространения колебаний в упругой среде называется *волновым процессом* или просто *волной*.

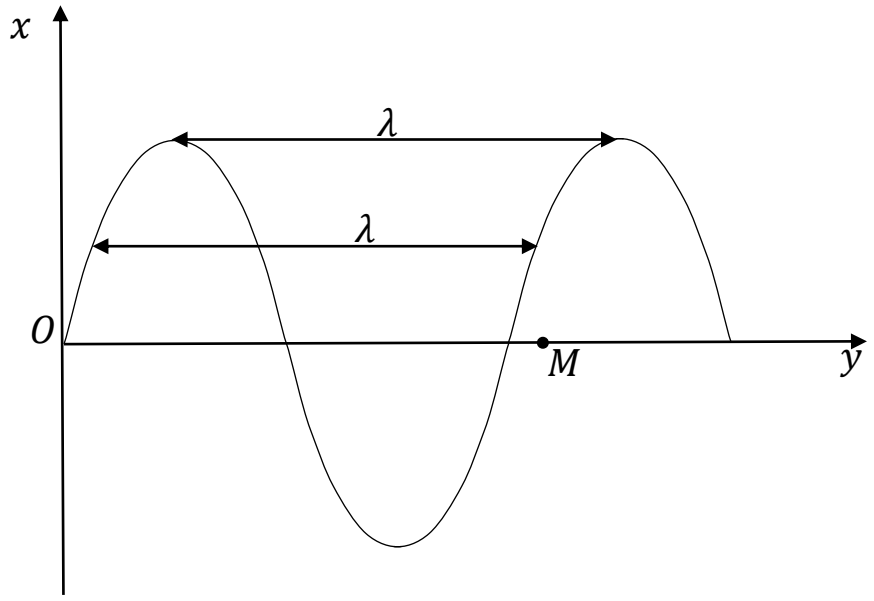


Рис. 6.11

Когда одна из частиц упругой среды придет в колебания, то начнут изменяться расстояния между ней и окружающими ее частицами, в результате чего возникнут упругие силы, с которыми колеблющаяся частица будет действовать на соседние. Под действием этой изменяющейся со временем упругой силы соседние частицы и придут в колебания. В связи с этим увлекаемые частицы среды будут несколько отставать по фазе от увлекающих, и процесс распространения колебаний будет происходить с некоторой скоростью. При этом каждая из частиц будет совершать колебания около своего положения равновесия, т.е. волна не переносит частицы среды в направлении своего распространения.

В зависимости от направления колебаний частиц относительно направления распространения волны, различают продольные и *поперечные волны*.

В *продольной волне* частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны.

В *поперечной волне* частицы колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны.

Характер волн зависит от упругих свойств среды. Если при сдвиге одного слоя относительно другого возникают упругие силы, стремящиеся возвратить сдвинутый слой в положение равновесия, то могут возникнуть поперечные волны. Если же при сдвиге слоев упругих сил не возникает, то поперечные волны образовываться не могут.

Так, например, ни жидкости, ни газы не обладают упругостью формы, упругая деформация сдвига в них не возникает, а поэтому в них не могут возникнуть поперечные волны (за исключением поверхности жидкости, по которой могут распространяться и поперечные волны, но более сложного характера: в них частицы движутся по замкнутым эллиптическим траекториям). Если в упругой среде возникают силы упругости при сжатии или растяжении, то в ней могут распространяться продольные волны. В твердых телах могут возникать как продольные, так и поперечные волны, в жидкостях и газах – только продольные.

Рассмотрим простейший случай распространения гармонического колебания вдоль оси y. На рис. 6.11 показано распределение смещений колеблющихся точек в определенный момент времени вдоль этой оси. График волны внешне очень похож на график гармонического колебания какой-либо точки. Однако, эти графики имеют совершенно различный смысл: график гармонического колебания показывает, как изменяется смещение колеблющейся точки с течением времени, график же волны показывает, каковы будут смещения различных колеблющихся точек в определенный момент времени.

Определение. Расстояние между двумя ближайшими точками, колеблющимися в одинаковых фазах, называется *длиной волны* λ.

Волна распространения на расстояние λ за время, равное периоду колебания, а поэтому скорость распространения волны будет: $v = \frac{\lambda}{T}$, откуда $\lambda = vT$.

Длину волны можно связать и с частотой колебаний. Так как частота колебаний $\nu = \frac{1}{T}$, то $\lambda = \frac{v}{\nu}$. Определенная нами скорость является скоростью распространения определенной фазы волны, а поэтому называется фазовой.

Определение. Граница, отделяющая колеблющиеся частицы от частиц, еще не начавших колебаться, называется *фронтом волны*.

В однородной среде направление распространения волны перпендикулярно к ее фронту.

Определение. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковых фазах, называется *волновой поверхностью*.

Фронт волны будет являться одной из волновых поверхностей. Направление, в котором распространяется волна, называется *лучом*.

Определим зависимость смещения произвольной точки (рис. 6.11) от ее положения и времени для данной волны.

Пусть колебания точки *0* совершаются по закону: $x = A\sin\omega t$. В точке *M*, если пренебречь затуханием, колебания будут возникать с некоторым запаздыванием, но совершаться по аналогичному закону:

$$x = A\sin\omega t_1.$$

Так как колебания в точке *M* начнутся позднее колебаний в точке *0* на $\frac{y}{v}$, то $t_1 = t - \frac{y}{v}$.

Следовательно,

$$x = A\sin\omega(t - \frac{y}{v}).$$

Полученное выражение называется уравнением *плоской волны*. Его можно представить и в другом виде, заменив скорость распространения волны длиной волны $\omega\frac{y}{v} = \frac{2\pi y}{Tv}$,

$$x = A\sin(\omega t - \frac{2\pi y}{\lambda}).$$

В рассмотренном случае волна распространялась в сторону возрастания *y*. Допустим, что волна распространяется в обратном направлении, т.е. в сторону убывания координаты *y*. Тогда колебания в точке *0* начнутся позднее, чем в точке *M* на $\frac{y}{v}$. Очевидно, что $t_1 = t + \frac{y}{v}$ и уравнение волны будет

$$x = A\sin(\omega t + \frac{2\pi y}{\lambda}).$$

Если *волна будет сферической*, то точки, расположенные на волновой поверхности радиуса *r*, будут приходить в колебания через $\frac{r}{v}$ после начала колебаний источника, их фаза будет $\omega\,(t - \frac{r}{v})$. Амплитуда колебаний в этом случае, даже если энергия волны не поглощается средой, не остается постоянной – она убывает с расстоянием от источника по закону $\frac{1}{r}$. Следовательно, *уравнение сферической волны* имеет вид:

$$x = \frac{A}{r}\sin\omega(t - \frac{r}{v}),$$

где *A* есть амплитуда волны на расстоянии от источника, равном единице.

6.8. Интерференция волн. Стоячие волны

Если в упругой среде распространяются одновременно несколько волн, то в местах их наложения колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности. Таким образом, одна волна не искажает другой; когда они разойдутся, то они не несут на себе никаких следов прошедшего наложения. Это утверждение, вытекающее из опыта, называется **принципом суперпозиции (наложения) волн**. Принцип суперпозиции был известен еще Леонардо да Винчи. Простейшей его иллюстрацией является независимое распространение волн по поверхности воды от двух брошенных камешков.

Однако принцип суперпозиции не всегда имеет место. Вспомним, что возникновение колебаний в какой-либо точке среды происходит в результате возникновения упругих сил, величина которых согласно закону Гука, прямо пропорциональна величине деформации. Результирующая сила будет равна геометрической сумме составляющих, а результирующее колебание – сумме колебаний, вызванных отдельными волнами. При больших амплитудах колебаний закон Гука выполняться не будет, и результирующая сила приведет к колебаниям, отличным от суммы колебаний, вызванных отдельными волнами. Подобная картина возникает при распространении ударных волн, возникающих при взрывах. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь волн малой амплитуды, для которых будет выполняться принцип суперпозиции.

Определение. Источники волн, колеблющиеся с одинаковой частотой и не меняющейся со временем разностью фаз, называют *когерентными*. Волны от когерентных источников называют *когерентными волнами*.

Наложение когерентных волн дает явление *интерференции*, заключающееся в том, что в определенных местах пространства происходит *усиление волнового движения*, в других же – *ослабление или полное уничтожение его*.

Пусть точки M и N (рис.6.12) колеблются в одинаковой фазе и с одинаковой частотой. Рассмотрим, что будет происходить в точке K. В ней будут накладываться друг на друга две когерентных волны

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t - \frac{2\pi y_1}{\lambda}) \text{ и } x_2 = A_2 \sin(\omega t - \frac{2\pi y_2}{\lambda}).$$

Амплитуду результирующего колебания найдем по формуле:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Максимальное значение амплитуды результирующих колебаний в точке K будет при $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$, т.е. при $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi k$, где k = *0, 1, 2, 3, ...* Тогда $A = A_1 + A_2$, если $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi(2k+1)$, где k = *0, 1, 2, 3, …*, то $A = |A_1 - A_2|$ – амплитуда колебаний в точке K будет минимальной.

Условие максимума или минимума амплитуды колебаний в точке К можно выразить и через разность хода волн $\Delta y = y_1 - y_2$:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi(y_1 - y_2)}{\lambda} = \frac{2\pi\Delta y}{\lambda}.$$

Условием максимума колебаний будет:

$$\frac{2\pi\Delta y}{\lambda} = 2\pi k, \text{ откуда } \Delta y = k\lambda = 2k\frac{\lambda}{2}.$$

Условием минимума колебаний будет:

$$\frac{2\pi\Delta y}{\lambda} = \pi(2k+1), \text{ откуда } \Delta y = (2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Таким образом, если на разности хода волн укладывается четное число полуволн, то при наложении волн в данной точке возникает максимум амплитуды. Если же для данной точки на разности хода волн укладывается нечетное число полуволн, то в ней будет минимум амплитуды.

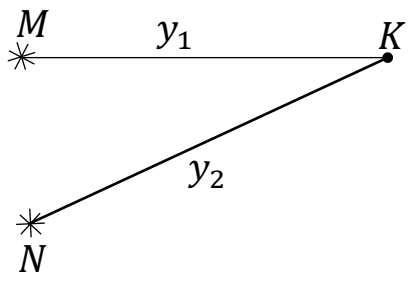


Рис. 6.12

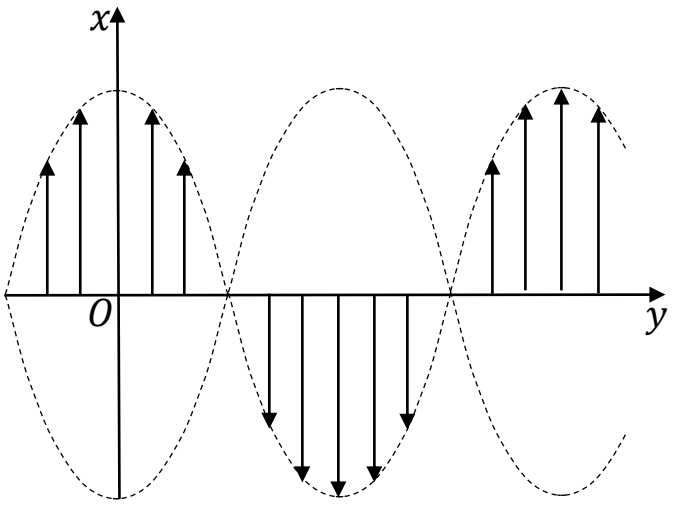


Рис. 6.13

Очень важный случай интерференции наблюдается при наложении двух встречных синусоидальных плоских волн одинаковой амплитуды и частоты, распространяющихся в противоположных направлениях. Практически такие волны возникают при отражении от преград.

Напишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$x_1 = A\sin(\omega t - \frac{2\pi y}{\lambda}),\ x_2 = A\sin(\omega t + \frac{2\pi y}{\lambda}).$$

Это означает, что в начале координат ($y = 0$) обе волны вызывают колебания в одинаковой фазе. В некоторой же точке M с координатой y суммарного значения смещения будет:

$$x = x_1 + x_2 = A\left[\sin(\omega t - \frac{2\pi y}{\lambda}) + \sin(\omega t + \frac{2\pi y}{\lambda})\right] =$$
$$= 2A\cos\frac{2\pi y}{\lambda}\sin\omega t.$$

Полученное выражение показывает, что *в результате интерференции прямой и обратной волн в каждой точке среды (с фиксированной координатой y) происходит гармоническое колебание с той же частотой ω, но с амплитудой*:

$$A_0 = 2A\cos\frac{2\pi y}{\lambda}.$$

Видно, что амплитуда результирующего колебания зависит от значения координаты y и не зависит от времени. В точках, где $\cos\frac{2\pi y}{\lambda} = 0$, колебания отсутствуют. Эти точки называются *узлами*. В точках, где $\cos\frac{2\pi y}{\lambda} = \pm 1$, амплитуда колебаний будет максимальной, равной $2A$. Эти точки называются *пучностями*.

Для узлов:

$$\frac{2\pi y}{\lambda} = \pm\pi(k + \frac{1}{2}),\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots \text{ или } y = \pm\frac{\lambda}{2}(k + \frac{1}{2})$$

Для пучностей:

$$\frac{2\pi y}{\lambda} = \pm\pi k,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots \text{ или } y = \pm\frac{\lambda}{2}k.$$

Из полученных формул видно, что расстояние между соседними пучностями равно $\frac{\lambda}{2}$, расстояние между соседними узлами тоже равно $\frac{\lambda}{2}$. Расстояние между ближайшими пучностью и узлом равно $\frac{\lambda}{4}$.

Описанный волновой процесс называют *стоячей волной*. Графически стоячая волна изображена на рис. 6.13.

6.9. Принцип Гюйгенса

Принцип Гюйгенса лежит в основе метода построения фронта волны. Он был сформулирован Гюйгенсом (1690 г.), но не был им доказан. Правильность этого принципа вытекала из сравнения результатов построения с опытом. Позднее он был доказан на основании общей теории упругости.

Принцип Гюйгенса заключается в следующем: *каждую точку фронта волны можно считать центром новой сферической волны; новый фронт волны является огибающей этих вторичных волн*.

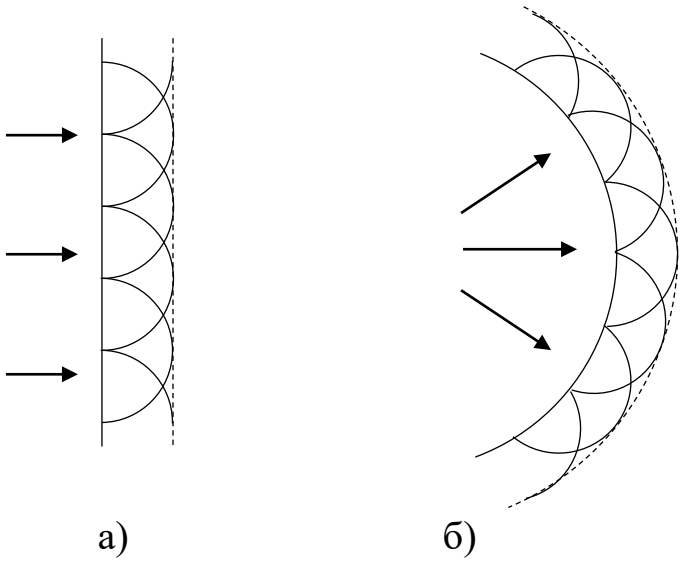


Рис. 6.14

На рис. 6.14 показано построение нового фронта волны для случаев плоской и круговой волны. Однако принцип Гюйгенса не отвечает на вопрос: почему нет волн в обратном направлении? На этот вопрос ответил Френель, который учёл интерференцию вторичных волн. Вторичные волны являются когерентными, а поэтому интерферируют. Интенсивность результирующих волн зависит от направления. Как показал Френель, она максимальна по направлению нормали к фронту волны и уменьшается при увеличении угла между нормалью и направлением вторичной волны.

При угле $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$ интенсивность результирующей волны равна нулю.

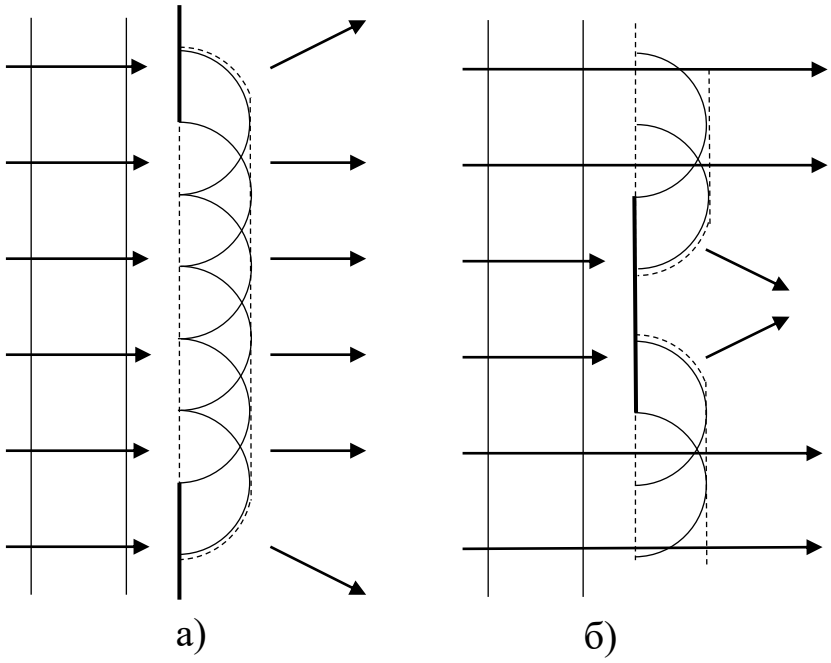


Рис. 6.15

Принцип Гюйгенса даёт возможность наглядно пояснить явление дифракции. Как известно, при прохождении волн через малые отверстия, размеры которых сравнимы с длинной волны, волна заходит в область тени. Отклонения от прямолинейности распространения возникают и в том случае, когда на пути волны находится препятствие. Если оно по своим размерам сравнимо с длинной волны, то огибание его происходит полностью, т.е. за ним не остаётся области тени. На рис. 6.15, а показано построение фронта волны в случае малого отверстия. На рис. 6.15, б показано огибание волной малого препятствия.

6.10. Основные характеристики звука

Если упругие волны, распространяющиеся в воздухе, имеют частоту в пределах примерно от 20 до 20000 гц, то, достигнув человеческого уха, они вызывают ощущение звука. В связи с этим упругие волны в любой среде, имеющие частоту в указанных выше пределах, называют *звуковыми волнами*. Упругие волны с частотой, меньшей 20 гц, называют *инфразвуком*; волны с частотами превышающими 20000 гц, называют *ультразвуком*.

Звуковые волны в газах и жидкостях могут быть только продольными, а в твердых телах – как продольными, так и поперечными.

Звуки характеризуются *высотой*, *громкостью* и *тембром*. Каждой из этих субъективных характеристик соответствует определенная физическая характеристика звуковой волны.

Высота звука зависит от частоты волны. Чем больше частота, тем больше высота тона воспринимаемого звука.

Громкости звука соответствует физическая характеристика, называемая интенсивностью.

Определение. Под *интенсивностью звуковых волн* понимают среднее значение плотности потока энергии, которую несёт с собой волна.

Определение. Под *плотностью потока энергии* понимается в данном случае энергия, переносимая распространяющейся волной через единицу площади за единицу времени.

Минимальная интенсивность, при которой мы начинаем слышать звук, называется *порогом слышимости*. Порог слышимости сильно зависит от частоты. Человеческое ухо наиболее чувствительно к частотам от 1000 до 4000 гц. В этой области порог слышимости составляет примерно $10^{-9}\ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2\text{сек}}$. При большой интенсивности звука порядка $10^{4}\ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2\text{сек}}$ звук начинает восприниматься органами осязания, а в ушах возникает болевое ощущение.

Так как ухо способно воспринимать звуки, отличающиеся своей интенсивностью в 10^{13} раза, то оно нечувствительно к малым ее изменениям. Поэтому в качестве характеристики громкости звука обычно принимают не интенсивность, а десятичный логарифм отношения интенсивности данного звука J к порогу слышимости J_0:

$$L = lg\frac{J}{J_0},$$

где величина L называется уровнем громкости и измеряется белами. Очевидно, что уровень громкости равен 1 белу, если $J = 10J_0$. Обычно пользуются единицами в 10 раз меньшими – децибелами (дб).

Тембр звука определяется характером волн. Только в редких случаях звук представляет собой чисто синусоидальную волну. Значительно чаще звуковая волна является сложной: кроме основной частоты источник излучает еще и более высокие частоты, кратные основной (что мы рассмотрим несколько позднее). Относительная интенсивность этих высших гармонических тонов и определяется собой тембр звука.

6.11. Эффект Доплера

До сих пор мы рассматривали волновое движение с точки зрения наблюдателя, покоящегося относительно среды, в которой распространяется волна. Рассмотрим, влияет ли движения источника звука и наблюдателя (приемника звука) относительно среды на восприятие звука.

Скорость распространения волн в среде мы будем считать независимой от движения источника и наблюдателя. Будем считать скорость как источника, так и наблюдателя положительной, если расстояние между ними увеличивается, и отрицательной – при уменьшении расстояния между ними. Нетрудно сообразить, что возможны три случая:

1. Наблюдатель движется, источник покоится.
2. Наблюдатель покоится, источник движется.
3. И наблюдатель, и источник движутся.

Попробуем определить длину волны (частоту), которую воспринимает наблюдатель, во всех этих случаях (впервые это было сделано Доплером в 1842 г).

<u>Первый случай</u>: пусть *наблюдатель движется со скоростью* u *навстречу волнам*. Тогда за промежуток времени t он пройдёт расстояние ut, на котором умещается $\frac{ut}{\lambda}$ волн. Если мимо неподвижного наблюдателя за промежуток времени t проходит νt волн, то мимо движущегося за то же время пройдёт на $\frac{ut}{\lambda}$ волн больше. Обозначив частоту, воспринимаемую наблюдателем, через ν_1 можно написать:

$$\nu_1 t = \nu t + \frac{ut}{\lambda} \text{ или } \nu_1 = \nu + \frac{u}{\lambda}.$$

Так как $\lambda = \frac{v}{\nu}$, то $\nu_1 = \nu\frac{v+u}{v}$, т.е. *частота, воспринимаемая наблюдателем, движущимся навстречу источнику волн, будет больше, чем воспринимаемая неподвижным наблюдателем*.

Если же наблюдатель удаляется, то, очевидно, знак скорости источника сменится на противоположный: $\nu_1 = \nu\frac{v-u}{v}$.

<u>Второй случай</u>: *источник движется от наблюдателя со скоростью* c. Если источник неподвижен, то за период T он испустит одну волну, которая распространится на расстояние $\lambda = vT$.

Но источник за промежуток времени T отошёл от начальной точки 0 на расстояние $s = cT$ (рис. 6.16) и волна распространится на расстояние $\lambda + s$, т.е. источник как бы испускает волны длиной

$$\lambda_1 = \lambda + s, \lambda_1 = T(v + c).$$

Переходя к частоте, получаем:

$$\nu_2 = \frac{v}{T(v+c)} = \nu \frac{v}{v+c},$$

т.е. *частота воспринимаемых волн в случае удаления источника будет меньше, чем от неподвижного*.

Очевидно, что в случае движения источника волн навстречу наблюдателю, мы получим:

$$\nu_2 = \nu \frac{v}{v-c}.$$

Третий случай. Все полученные выше формулы воспринимаемой частоты можно объединить для случая *одновременного движения источника и наблюдателя*. *Воспринимаемая частота*

$$\nu' = \nu \frac{v \pm u}{v \pm c},$$

причем нижние знаки следует брать в случае взаимного сближения источника и наблюдателя, а верхние при их взаимном удалении. Если скорости u и c направлены не по прямой, соединяющей прибор и источник, то следует брать их составляющие на эту прямую.

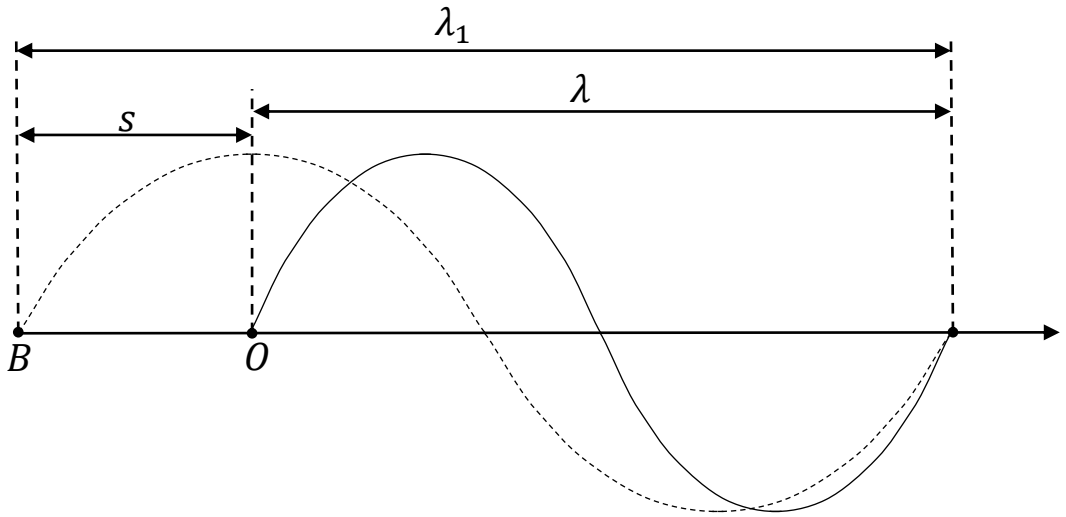


Рис. 6.16

Изменение воспринимаемой частоты в случае движения источника и наблюдателя относительно среды, в которой распространяется волна, получило название **эффекта Доплера**.

Нетрудно заметить, что эффект Доплера в случаях движения источника к наблюдателю и наблюдателя к источнику оказывается различным (сравним рассматриваемые выше первый и второй случаи). Однако это не противоречит принципу относительности Галилея.

Дело в том, что в распространении волн кроме источника и приемника играет роль среда, в которой они распространяются. Разные результаты получаются потому, что в одном случае наблюдатель движется относительно среды, а в другом случае источник. Это совершенно разные явления, и поэтому они дают разные результаты.

Прекрасным примером эффекта Доплера является наблюдение гудка быстро движущегося поезда. При прохождении мимо наблюдателя высота тона свистка скачком понижается.

6.12. Источник звука

Определение. *Источником звука* является всякое тело, колеблющееся со звуковой частотой, помещенное в упругую среду.

Существует три принципиальных различных класса источников.

I. Источники, от которых излучается звук в результате свободных колебаний системы. Такими источниками звука являются камертоны, колокола, пластинки и стержни, возбуждаемые ударом, струны, возбуждаемые как ударом (рояль), так и щипком (арфа, гитара и т.п.).

Перечисленные выше источники имеют малое затухание амплитуды и получаемые от них звуки приближаются по своему характеру к периодическим звуковым процессам. Периодические и близкие к ним звуки называют музыкальными. Если затухание очень велико, то звуки теряют музыкальность и имеют характер удара, щелчка (например, удар двух камней).

В качестве примера рассмотрим колебания струны. Под струной понимается твердое тело, поперечное размеры которого малы по сравнению с его длиной. Если в каком-либо месте струны, закрепленной на обоих концах, нанести удар перпендикулярно к ней, то возникшее в этом месте смещение будет распространяться вдоль струны до ее концов, отразится от них с потерей полуволны. В результате наложения встречных волн в струне, возникает стоячая волна с узлами на концах. При этом на длине струны должно укладываться целое число полуволн (рис. 6.17):

$$l = n\frac{\lambda}{2},$$

откуда $\lambda = \frac{2l}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ или $\nu = n\frac{v}{2l}$.

В струне может одновременно возникнуть несколько стоячих волн с различной частотой. Частота $\nu_0 = \frac{v}{2l}$ называется основной частотой, а излучаемый звук той же частоты называется основным тоном. Тона звуков, соответствующих более высоким частотам, называются обертонами или высшими гармоническими тонами.

II. Ко второму классу относятся источники, являющиеся автоколебательными системами. Из музыкальных инструментов автоколебания имеют место в смычковых инструментах (скрипка, виолончель, альт и т.п.), духовных инструментах, органных трубах, свистках.

Рассмотрим, как возникают автоколебания струны у смычковых инструментов. При равномерном движении волоса смычка, натертого канифолью, струна под действием сил трения покоя будет удаляться от положения равновесия. Когда упругая сила струны превысит силу трения покоя, струна отрывается от волоса, быстро проходит на другую сторону от положения равновесия и в момент наибольшего отклонения снова захватывается смычком.

Объясним возникновение автоколебаний в органной трубе (рис. 6.18, а). При продувании сжатого воздуха струя ударяет в клин *К*. Часть струи, разрезаемой клином, поступает в трубу и создает около отверстия сжатие. При этом давление воздуха в нижней части трубы возрастает и становится больше, чем снаружи. В связи с этим воздушная струя идет через отверстие наружу. Возникшее в нижней части сжатие распространяется вдоль трубы. При этом через $\frac{1}{2}T$ на месте сжатия возникнет разрежение. Теперь давление воздуха вне трубы будет больше, чем около отверстия в трубе и струя устремится в трубу. При каждом отклонении струя будет давать толчки колеблющемуся столбу воздуха и, таким образом, будет поддерживать незатухающие автоколебания в трубе за счет энергии сжатого воздуха.

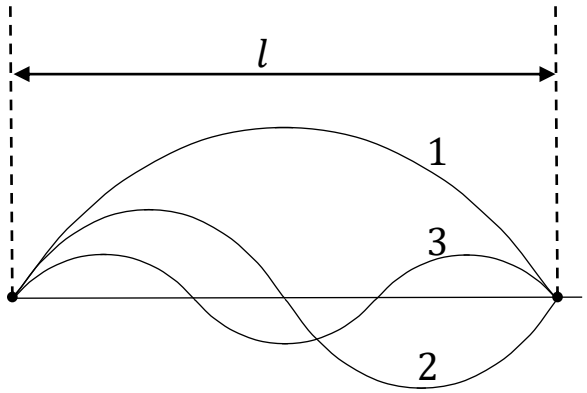


Рис. 6.17

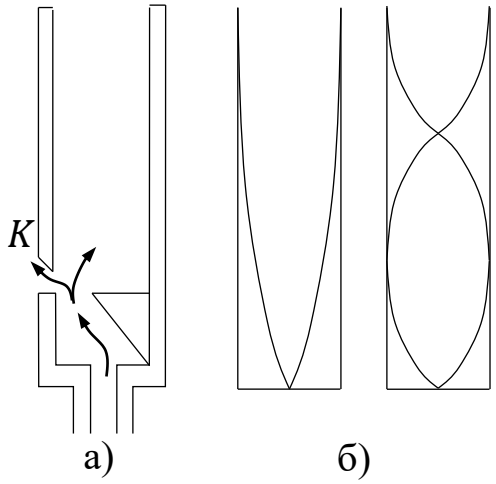


Рис. 6.18

В трубе устанавливается стоячая волна с узлом у закрытого конца и пучностью у открытого. Основным тоном трубы будет тон с длиной волны λ равной $\frac{1}{4}$ длины труб. Кроме того, в тубе могут возникнуть и обертон (рис. 6.18, б) с длиной волны

$$\lambda_1 = (2\,n + 1)\frac{\lambda}{2}, \text{ где } n = 1, 2, 3, \ldots$$

III. К третьему классу относятся источники, излучающие звук в результате вынужденных колебаний, причем колеблющаяся система лишь воспроизводит колебания, к которым ее вынуждает внешняя сила. Примерами источников звука этого класса является громкоговорители, мембраны граммофонов, сирены и т.п. В громкоговорителях звук возникает в результате колебаний диффузора, который колеблется с частотой импульсов электрического тока, проходящего через звуковую катушку. Мембрана граммофона приводится в колебания иглой, скользящей по бороздкам пластинки. В сирене поток воздуха или пара ритмически прерывается быстро вращающимся диском с рядом отверстий.

6.13. Ультразвук

Источники, колеблющиеся с частотой свыше 20 000 гц дают ультразвуки. Для получения ультразвуков в настоящее время используют два явления обратный пьезоэлектрический эффект и магнитострикцию.

Пьезоэлектрический эффект заключается в том, что ряд кристаллов (кварца, сегнетовой соли, титаната бария и т.д.) при деформации сжатия или сдвига электризуются. И, наоборот, пластинка, вырезанная определенным образом из кристалла, под действием электрического поля слегка деформируется – обратный пьезоэлектрический эффект. Поместив такую пластинку в поле конденсатора, не обкладки которого подается переменное напряжение, можно получить вынужденные колебания пластинки. При частоте переменного напряжения свыше 20 000 гц пластинка будет являться источником ультразвука.

Магнитострикция заключается в том, что ферромагнитные вещества (железо, никель, кобальт, некоторые сплавы) при действии на них магнитного поля слегка деформируются. Если поместить ферромагнитный стержень в магнитное поле катушки, по которой пропустить переменный ток достаточно большой частоты, то стержень станет источником ультразвука.

Ультразвуковые волны, благодаря малой длине волны, более слабо, чем обычные звуковые волны, обнаруживают явления дифракции. Это позволяет получить хорошо направленные пучки ультразвуковых волн. В воздухе ультразвук сильно поглощается. В жидкостях его поглощение значительно меньше.

Возможность получения узконаправленных пучков позволило применить ультразвук для гидролокации с целью обнаружения подводных лодок, косяков рыб, измерения глубины моря.

Широко применяются ультразвуковые дефектоскопы. Советский физик С.Я. Соколов разработал импульсный дефектоскоп. Посланный в изделие импульс ультразвука при наличии дефекта (раковины, трещины или неоднородности) отражается от него и, вернувшись к приемнику, в котором используется прямой пьезоэффект, преобразуется в электрический сигнал, фиксируемый осциллографом

Ультразвуковая волна сильно взаимодействует с веществом. При достаточной интенсивности она может изменять структуру вещества, разрушать крупные молекулы, создавая при этом вещества с новыми свойствами. Ультразвук используется для дробления вещества и получения эмульсий, для очистки мелких деталей сложной формы (например, частей часовых механизмов).

В медицине ультразвук используется для уничтожения некоторых видов бактерий и для обнаружения злокачественных опухолей, в некоторых звук распространяется иначе, чем в здоровых тканях.

6.14. Задачи

6.14.1. Примеры решения задач

6.1. Обруч диаметром 56 см висит на гвозде, вбитом в стену, и совершает малые колебания в плоскости, параллельной стене. Найти период этих колебаний.

СГС

$a = 56$ см

$T - ?$

В инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, рассматриваются механические собственные незатухающие гармонические колебания физического маятника – обруча.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl_0}}$ (1) $\quad I = I_0 + mb^2$ (2) $\quad I_0 = mr^2$

$b = r,$

$l_0 = r,$

$r = \frac{d}{2},$

В системе уравнений формула (1) дает значение периода T собственных незатухающих гармонических колебаний физического маятника, в ней I – его момент инерции относительно оси колебаний, проходящей через гвоздь, m – масса маятника, l_0 – расстояние от центра масс обруча до оси колебаний, формула (2) выражает теорему Штейнера – Гюйгенса, в которой I – момент инерции обруча относительно оси колебаний, I_0 – момент инерции обруча относительно оси инерции, проходящей через центр масс обруча, параллельно оси колебания маятника, b – расстояние между этими осями.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}},$$

$$T = 2 \cdot 3{,}14\sqrt{\frac{56\text{ см}}{980\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}}} = 1{,}5\text{ с}.$$

6.2. Маятник в виде маленького шарика, подвешенного на нити длиной 10 см, находится внутри жидкости, плотность которой в 1,2 раза меньше плотности шарика. Определить период колебаний маятника, пренебрегая сопротивлением жидкости.

СГС	
$l = 56$ см	
$n = 1{,}2$	
$T-?$	

В инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, рассматриваются механические собственные незатухающие гармонические колебания математического маятника (так как размеры шарика не даны, и он назван в тексте задачи маленьким, то можно его считать материальной точкой, а нить будем считать невесомой и нерастяжимой). На шарик действуют три силы: сила тяжести $\vec{F}_T$ со стороны Земли, сила Архимеда $\vec{F}_A$ со стороны жидкости в направлении, противоположном силе тяжести, и сила натяжения нити вдоль нити. Как следует из уравнения движения математического маятника его ускорение будет обусловлено моментом двух сил (силы тяжести и силы Архимеда; момент силы натяжения нити относительно оси колебаний равен нулю) и, кроме того, масса шарика, как мера его инертности, увеличивается на массу вытесненной шариком жидкости (жидкость в объеме шарика вместе с ним находится в колебательном движении).

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$ (1), $g' = \frac{F_T - F_A}{m_ш + m_ж}$ (2), $F_T = \rho_ш V g$, $F_A = \rho_ж V g$, $m_ш = \rho_ш V$, $m_ж = \rho_ж V$, $n = \frac{\rho_ш}{\rho_ж}$ (3)

В системе уравнений формула (1) дает значение периода собственных незатухающих гармонических колебаний математического маятника, в которой g'– модуль ускорения, значение которого, исходя из решения уравнения движения математического маятника и рассмотренного выше физического смысла задачи, определяется формулой (2), в ней F_T и F_A модули силы тяжести шарика и силы Архимеда, действующих на шарик, $m_ш$ и $m_ж$ – массы шарика и жидкости, вытесненной шариком (их значение через плотности шарика и жидкости даны в равенствах, записанных в системе уравнений без номеров),

формула (3) дает соотношение между плотностями шарика и жидкости.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l(n+1)}{g(n-1)}},$$

$$T = 2 \cdot 3{,}14\sqrt{\frac{10\ \ см(1{,}2+1)}{980\ \ \frac{см}{с^2}(1{,}2-1)}} = 2{,}1\ \ с.$$

6.3. Маятник в виде грузика, подвешенного на нити длиной 50 см, колеблется в кабине самолета, летящего горизонтально с ускорением 2,5 м/с^2. Каков период его колебаний?

СИ

$l = 50$ см $= 0{,}5$м

$a = 2{,}5\,\frac{м}{с^2}$

$T - ?$

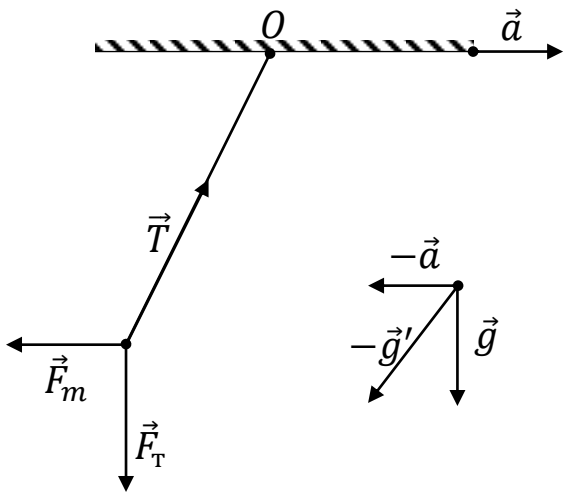


Рис. 6.19

В неинерциальной системе отсчета, связанной с самолетом, рассматриваются механические собственные незатухающие гармонические колебания математического маятника. На грузик действуют силы: сила тяжести со стороны Земли $\vec{F}_T$, сила натяжения нити $\vec{T}$ со стороны нити вдоль нити, сила инерции $\vec{F}_{ин}$, направленная противоположно ускорению $\vec{a}$ самолета. Как и в предыдущей задаче, ускорение маятника обусловлено двумя силами $\vec{F}_T$ и $\vec{F}_{ин}$ (рис. 6.19, на котором точка O – точка подвеса маятника на потолке кабины самолета, летящего с ускорением $\vec{a}$); на чертеже положение нити маятника соответствует положению равновесия маятника.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}\ (1),$$

$$g' = \sqrt{g^2 + a^2}\ (2).$$

В системе уравнений формула (1) – это формула периода собственных незатухающих гармонических колебаний математического маятника; формула (2) следует из чертежа и рассмотренного выше физического смысла задачи.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}},$$

$$T = 2 \cdot 3{,}14\sqrt{\frac{0{,}50\ \ м}{\sqrt{(9{,}8\ \ \frac{м}{c^2})^2+(2{,}5\ \ \frac{м}{c^2})^2}}} = 1,4\ \ c.$$

6.4. Определить полную мощность источника волн в воздухе, если в любом направлении на расстоянии 100 м от него амплитуда давления равна 0,090 Па. Давление нормальное, температура воздуха 20^0 С, затухание ничтожно.

СИ	
$l = 100м$	
$\Delta p = 0{,}090Па$	
$t = 20°C, T = 293K$	
$\mu = 29 \cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{моль}$	
$\gamma = 1{,}4$	
$\rho = 1{,}3\ \frac{кг}{м^3}$	
$N-?$	

В атмосфере Земли рассматривается распространение механической сферической продольной упругой волны без поглощения ее энергии воздухом.

$N_п = N_в$ (1),

$N_в = IS$ (2),

$I = \frac{(\Delta p)^2}{2\rho v}$ (3)

$S = 4\pi l^2$

$v = \sqrt{\gamma\frac{RT}{\mu}}$ (4)

В системе уравнений формула (1), выражает равенство полной мощности источника волны $N_п$ и мощности волны $N_в$ на любом расстоянии от источника, так как энергия волны воздухом атмосферы не поглощается (по условию задачи). Мощность волны может быть выражена через интенсивность волны I формулой (2) (интенсивность –

это фактически мощностная характеристика волны, отнесенная к единице площади S волновой поверхности), а интенсивность волны связана с амплитудой давления Δp в волне формулой (3), в которой ρ – плотность воздуха (берется из таблиц при нормальном давлении и температуре 20^0 С), υ – скорость волны, определяемая формулой (4), в ней значение γ и μ берутся из таблиц.

$$N = \frac{(\Delta p)^2 4\pi l^2}{2\rho\sqrt{\gamma\frac{RT}{\mu}}},$$

$$N = \frac{(0{,}090\ \frac{кг}{с^2\cdot м})^2\cdot 4\cdot 3{,}14\cdot(100\ м)^2}{2\cdot 1{,}3\ \frac{кг}{м^3}\sqrt{\frac{1{,}4\cdot 8{,}31\ \frac{кг\cdot м^2}{с^2\cdot моль\cdot К}\cdot 293\ К}{29\cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{моль}}}} = 1,2\ \ Вт.$$

6.5. На расстоянии 10 м от источника, размеры которого малы, уровень интенсивности звука равен 10 дБ. Пренебрегая затуханием вычислить уровень интенсивности на расстоянии 4,9 м и на каком расстоянии звук не слышен.

СИ	
$l_1 = 10$м $L_1 = 20$дБ $l_2 = 4{,}9$м $L_3 = 0$дБ	
$L_2 - ?$ $l_3 - ?$	

От точечного источника звука (в тексте задачи указано, что размеры его малы) в атмосферном воздухе распространяется механическая продольная сферическая звуковая волна, энергия которой воздухом не поглощается.

$L_1 = 10lg\frac{I_1}{I_0}$ (1), $I_2 = \frac{E}{S_2 t}$ (5), $S_1=4\pi l_1^2$,

$S_2=4\pi l_2^2$,

$L_2 = 10lg\frac{I_2}{I_0}$ (2), $L_3 = 10lg\frac{I_3}{I_0}$ (6), $S_3=4\pi l_3^2$.

$L_2 - L_1 = 10lg\frac{I_2}{I_1}$ (3), $L_1 - L_3 = 10lg\frac{I_1}{I_3}$ (7),

$I_1 = \frac{E}{S_1 t}$ (4), $I_3 = \frac{E}{S_3 t}$ (8),

В системе уравнений формула (1), (2), (6) дают значения уровня интенсивности звука L_1, L_2, L_3 на расстояниях l_1, l_2, l_3 от источника звука, I_1, I_2, I_3 – интенсивности звука на этих расстояниях, I_0 – интенсивность звука на пороге слышимости. Согласно определению интенсивности звука записывается формулы (4), (5), (8), в них E – энергия, переносимая звуковой волной через волновые поверхности с площадями S_1, S_2, S_3 за время t, формулы (3) и (7) получены из формул, соответственно, (2) и (1), (1) и (6).

$L_2 = L_1 + 20lg\frac{l_1}{l_2}$, $\quad L_2 = 20$ дБ $+ 20\lg\frac{10\text{ м}}{4{,}9\text{ м}}$дБ $= 26$ дБ,

$L_1 - L_3 = 20lg\frac{l_3}{l_1}$, $\quad 20$ дБ $= 20\lg\frac{l_3}{10\text{ м}}$ дБ,

$l_3 = 100$ м.

6.14.2. Задачи для самостоятельного решения

6.6. Уравнение колебаний материальной точки имеет вид $x = 0{,}06\cos 100\pi t$. Чему равна амплитуда A, период T и частота ν колебаний этой точки? Найти максимальную скорость v_{max}, максимальное ускорение a_{max}, среднюю скорость $v_{\text{ср}}$ и среднее ускорение $a_{\text{ср}}$ точки на пути от ее крайнего положения до положения равновесия. Все величины выражены в единицах СИ.

6.7. Материальная точка совершает колебания по закону $x = 0{,}4\sin\pi(t + 0{,}5)$. Определить период T и начальную фазу φ_0 колебаний. Чему равна фаза колебаний φ_1 и смещение точки x_1 в момент времени $t_1 = 0{,}5$ с от момента начала отсчета времени колебаний. Через какой минимальный промежуток времени t_2 после начала отсчета движения точки она пройдет через положение равновесия? Все величины выражены в единицах СИ.

6.8. На рис. 6.20 приведен график $x = x(t)$ гармонического колебания маятника. По графику определить амплитуду A, период T и частоту ν колебаний.

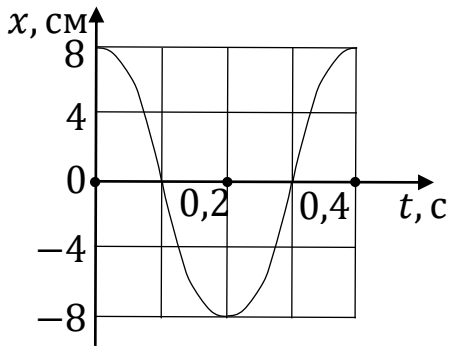


Рис. 6.20

6.9. Материальная точка совершает колебания согласно уравнению $x = 0{,}4\cos\pi(0{,}5t + 1)$. Построить график ее колебаний за промежуток времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 4$ с. Все величины выражены в единицах СИ.

6.10. Математический маятник, подвешенный на нити длинной $l = 0{,}5$ м, совершает колебания с амплитудой $A = 2$ см. Написать уравнения, выражающие зависимость смещения x, скорости v и ускорения a этого маятника от времени колебаний. Чему равно ускорение a_1 маятника при смещении $x_1 = 1$ см? Начальную фазу φ_0 принять равной нулю.

6.11. На какое расстояние S надо оттянуть груз массой $m = 500$ г от положения равновесия, чтобы он, будучи прикреплен к пружине жесткостью $k = 0{,}2\ \frac{\text{кН}}{\text{м}}$, проходил через положение равновесия со скоростью $v_{max} = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$?

6.12. Если к шарику массой m_1? Колеблющемуся на пружине, подвесить снизу еще один шарик массой $m_2 = 300$ г, то частота колебаний уменьшится в $n = 2$ раза. Чему равна масса m_1 первого шарика?

6.13. На гладком горизонтальном столе лежит шар массой M, прикрепленный к пружине с жесткостью k. В шар попадает пуля массой m, имеющая в момент удара скорость v, направленную вдоль оси пружины. Считая удар пули абсолютно неупругим и пренебрегая мас-

сой пружины и сопротивлением воздуха, определить амплитуду A и период T колебаний шара с пулей (рис. 6.21).

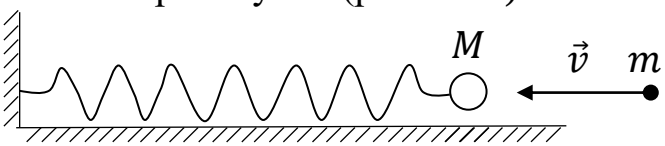


Рис. 6.21

6.14. Найти период T малых колебаний тела массой m, изображенного на рис. 6.22 (а, б). Жесткости пружин k_1 и k_2. Трением пренебречь.

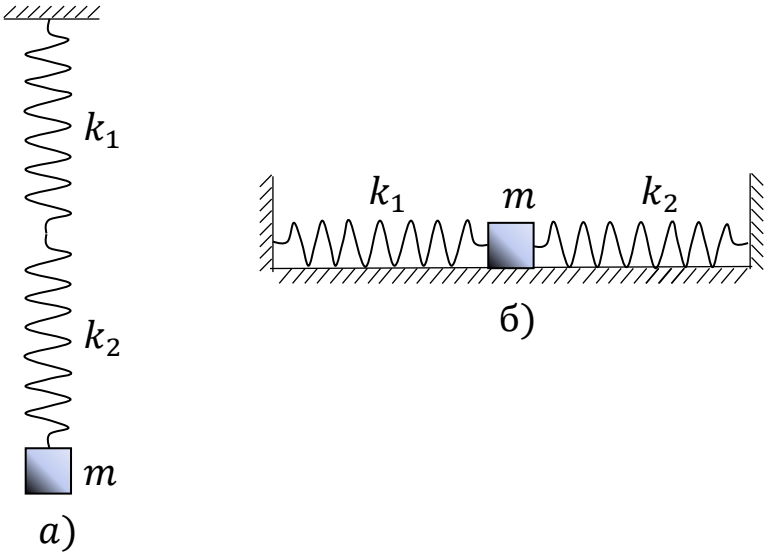


Рис. 6.22

6.15. Уравнение колебаний пружинного маятника весом $P = 0{,}102$ Н имеет вид $x = 0{,}1 \sin\frac{\pi}{2}t$. Постройте график зависимости от времени t возвращающей силы F, кинетической $W_к$, потенциальной $W_п$ и полной W и полной энергий маятника. Найдите максимальные значения этих величин F_{max}, $W_{к\,max}$, $W_{п\,max}$. Все величины выражены в единицах СИ.

6.16. Поплавок на волнах за $t = 20$ ссовершил $N_1 = 30$ колебаний, а на расстоянии $S = 20$ мнаблюдатель насчитал $N_2 = 20$ гребней. Чему равна скорость волны v?

6.17. Когда наблюдатель воспринял по звуку, что самолет находится у него над головой, он увидел его под углом $\alpha = 60°$ к горизон-

ту. С какой скоростью v_c летел самолет? На каком расстоянии S от наблюдателя он находился в этот момент, если звук дошел до него за $t = 2$ с?

6.18. Одна точка волны отстоит от вибратора (источника колебаний) на расстоянии $S_1 = 10$ м, а вторая – на расстоянии $S_2 = 16$ м (рис. 6.23), причем обе точки лежат на одном луче (т.е. на прямой вдоль которой от вибратора распространяется энергия, переносимая волной). Найти разность фаз колебаний этих точек $\Delta\varphi$, если скорость волны $v = 20\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Частота колебаний $\nu = 100$ Гц.

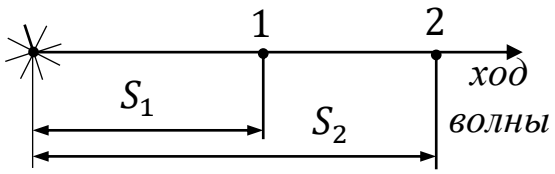


Рис. 6.23

6.19. Смещение x от положения равновесия точки в момент времени $t = \frac{T}{3}$ равно половине амплитуды A. Найти длину бегущей волны λ. Расстояние от точки до источника колебаний $r = 4$ см.

6.20. От одного источника до точки M звуковая волна доходит за время $t_1 = 0{,}67$ с, а от второго источника до этой же точки волна доходит за $t_2 = 0{,}7$ с. Что будет наблюдаться в точке M: усиление или ослабление звука, если волны когерентные с длинной волны $\lambda = 6{,}8$ м.

6.21. Средняя квадратичная скорость молекул двухатомного газа $\bar{v}_{\text{кв}} = 500\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Чему равна скорость звука $v_{\text{зв}}$ в этом газе?

6.22. Найти основную частоту колебаний ν_0 стальной струны, излучающей звуковую волну, если длина струны $l = 60$ см, диаметр ее поперечного сечения $d = 0{,}5$ мм, а сила натяжения $F_{\text{н}} = 0{,}3$ кН. Плотность стали $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Глава 7. МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

7.1. Стационарное течение идеальной жидкости. Уравнение Бернулли

Вначале сделаем несколько замечаний об общих свойствах жидкостей и газов, а также сравним их свойства со свойствами твердых тел.

1. Жидкости и газы упруги только в отношении изменения объема, но не формы.
2. Они могут испытывать только деформации сжатия, но не могут испытывать деформаций изгиба, сдвига и кручения.
3. Как жидкости, так и газы, принимают форму сосуда, причем газы всегда занимают полностью весь предоставленный им объем, а жидкости могут занимать его и частично. (Например, воздух в закрытой бутылке занимает ее полностью, а стакан воды, налитый в поллитровую бутылку, зайдет ее объем только наполовину).

Аналогично твердым телам мы будем рассматривать жидкости и газы как сплошные. При этом мы станем мысленно делить их на элементарные объемы, которые будем выбирать настолько малыми, чтобы направленное (но не хаотичные) движение атомов можно было в пределах этих объемов считать одинаковым.

Всякий объем жидкости и газа, можно рассматривать как сумму элементарных объемов, т.е. жидкость и газ мы сведем к системе материальных точек, не связанных жестко между собой. **Тогда к жидкостям и газам мы можем применять законы механики системы.**

Если же жидкость и газ находятся в покое или таком движении, при котором взаимное расположение элементарных объемов не изменяется, то к ним можно применить динамику твердого тела. **Это положение носит название принципа отвердевания**.

Определение. *Идеальной жидкостью* называют абсолютно невязкую и абсолютно несжимаемую жидкость.

Конечно, идеальная жидкость является лишь более или менее хорошим приближением к реальным жидкостям, а поэтому все наши дальнейшие выводы, относящиеся к идеальной жидкости, могут быть применены к реальным жидкостям только приближенно.

Определение. Линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением скорости частицы жидкости в этой точке, называются *линиями тока*.

Определение. Часть жидкости, ограниченная поверхностью, по которой располагаются линии тока, называется *трубой тока*.

Все частицы жидкости, находящиеся в некотором сечении трубки тока, при движении продолжают двигаться внутри ее, не выходя за ее пределы. Также извне никакие частицы не проникают внутрь трубки тока. Течение в трубке тока будет таким же, как течение без трения в трубке с жесткими стенками, сечение которой достаточно плавно изменяется.

Если распределение скоростей в потоке не изменяется со временем, то течение жидкости называется *стационарны*м. Линия тока в стационарном потоке совпадает с траекторией частицы жидкости.

Очевидно, что при стационарном течении жидкости, происходящем без разрывов, через разные сечения за равные промежутки времени должна протекать одинаковая их масса. Представим себе трубку тока с площадями сечений S_1 и S_2 (рис. 7.1). Скорость течения жидкости в сечении S_1 пусть будет v_1, а в сечении S_2 - v^2. За промежуток времени Δt через сечение S_1 протечет жидкости $\rho S_1 v_1 \Delta t$, а через сечение

$$S_2 - \rho S_2 v_2 \Delta t.$$

Из закона сохранения массы следует, что

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \text{ или } Sv = const.$$

Полученное выражение называется **теоремой неразрывности струи**.

Рассмотрим движение идеальной жидкости в трубке тока. Применим к объему жидкости, заключенному между сечениями S_1 и S_2 (рис. 7.2), **закон сохранения энергии** в наиболее общей форме: *изменение энергии жидкости равно работе, которую совершают над ней внешние тела*. Внешней по отношению к выбранному объему будет жидкость, расположенная в трубке тока левее сечения S_1 и правее сечения S_2.

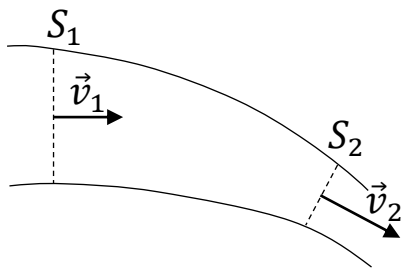


Рис. 7.1

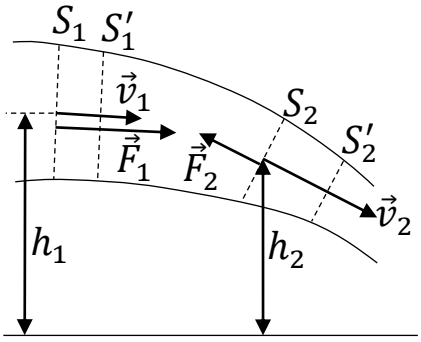


Рис. 7.2

Она действует на рассматриваемый нами объём с силами давления $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Действия жидкости, находящейся в соседних трубках тока, мы можем считать взаимно компенсирующимися.

Обозначив начальную энергию выбранного нами объёма жидкости через E_0, а его энергию через промежуток времени Δt, когда он займет положение между сечениями S_1' и S_2', через E, можно написать:

$$E - E_0 = A.$$

Так как объём, заключенный между сечениями S_1 и S_2, можно представить в виде суммы двух объёмов (между сечениями S_1 и S_1' и между сечениями S_1' и S_2), а объем, заключенный между сечениями S_1' и S_2' − тоже в виде суммы двух объёмов (между сечениями S_1' и S_2 и между сечениями S_2 и S_2'), то его начальная и конечная энергия будут:

$$E_0 = E_{S_1S_1'} + E_{S_1'S_2} \text{ и } E = E_{S_1'S_2} + E_{S_2S_2'}.$$

Вычитаем из второго равенства первое, получаем:

$$E_{S_2S_2'} - E_{S_1S_1'} = A$$

т.е. изменение энергии рассматриваемого объема сводится к разности энергий объёмов жидкости, заключенных между сечениями S_2S_2' и S_1S_1'.

В дальнейшим наши рассуждения можно провести двумя путями:

1) рассматривая только движение выбранного нами объема,

2) рассматривая систему «выбранный объем – Земля». В первом случае изолированный объём жидкости будет обладать только кинетической энергией, но зато Земля будет совершать над ним работу. Во втором случае данная система будет обладать не только кинетической, но и потенциальной энергией, но зато Земля не будет уже внешним телом, производящим работу. Очевидно, оба пути решения зада-

чи приведут нас к одинаковому результату, что и рекомендуется проверить.

Остановимся на втором пути. Тогда

$$E_{S_1S_1'} = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1,\ E_{S_2S_2'} = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2.$$

Массы этих объемов одинаковы, так как жидкость идеальна. Внешняя работа $A = F_1v_1\Delta t - F_2v_2\Delta t$.

Тогда $\frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 - \frac{mv_1^2}{2} - mgh_1 = F_1v_1\Delta t - F_2v_2\Delta t$.

Разделив обе части равенства на соответствующий массе m объем $S_1v_1\Delta t = S_2v_2\Delta t$ и учитывая, что $\frac{F}{S}$ есть внешнее давление, получаем:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2 \text{ или } \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = const.$$

Полученное нами выражение называется **уравнением Бернулли**. Несмотря на то, что оно получено для идеальной жидкости (в противном случае$S_1v_1\Delta t$ может быть и не равно $S_2v_2\Delta t$ а кроме того нужно учесть еще работу сил трения), оно достаточно хорошо выполняется и для неидеальных жидкостей, внутреннее трение в которых не очень велико.

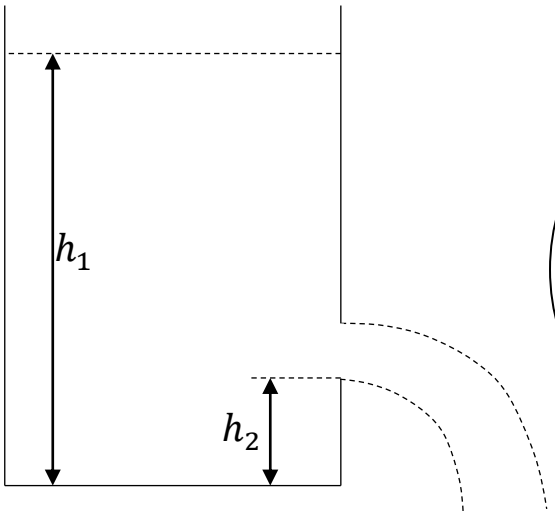


Рис. 7.3

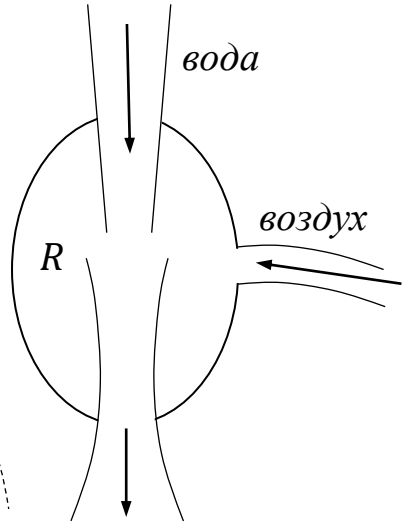


Рис. 7.4

Нетрудно заметить, что все члены в уравнении Бернулли имеют размерность давления. Величина p есть внешнее давление, ρgh – гидростатическое давление; а $\frac{\rho v^2}{2}$ – гидродинамическое давление. Полученное нами равенство означает, что в каждом сечении трубки тока

сумма внешнего, гидростатического и гидродинамического давлений есть величина постоянная.

Рассмотрим ряд следствий, вытекающих из уравнения Бернулли.

1. Пусть жидкость вытекает из небольшого отверстия в широко открытом сосуде (рис. 7.3). Выделим в жидкости трубку тока, имеющую своими сечениями открытую поверхность жидкости и отверстие, через которое она вытекает. Давления в обоих сечениях атмосферные, а потому одинаковые. Скорость перемещения открытой поверхности жидкости можно считать равной нулю. Тогда

$$\rho g h_1 = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h_2.$$

Введя $h = h_1 - h_2$ – высоту жидкости в сосуде над отверстием, получаем:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

2. Пусть жидкость течет в трубе переменного сечения горизонтально. Тогда согласно уравнению Бернулли

$$\frac{pv_1^2}{2} + p_1 = \frac{pv_2^2}{2} + p_2.$$

Решая полученное равенство совместно с уравнением неразрывности струи, получаем:

$$\frac{pv_1^2}{2} \cdot \frac{S_2^2 - S_1^2}{S_2^2} = p_2 - p_1.$$

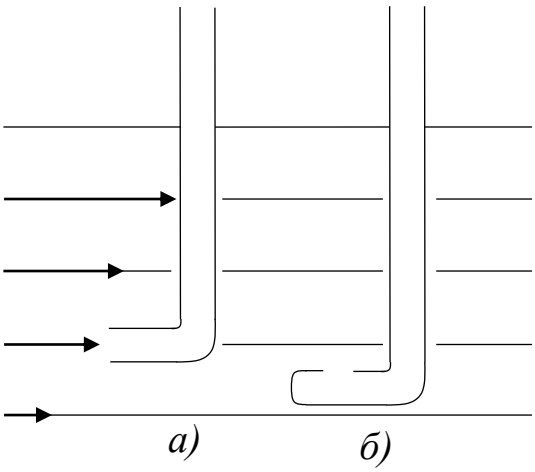


Рис. 7.5

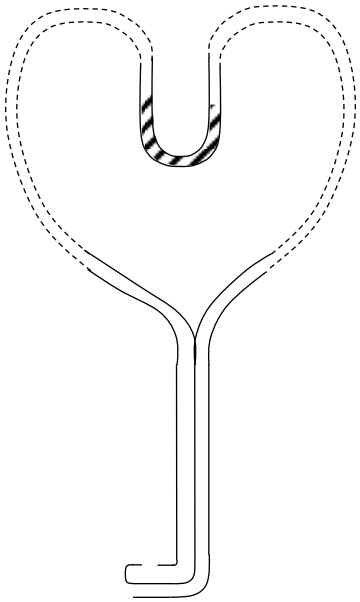


Рис. 7.6

Если $S_2 > S_1$, то $p_2 > p_1$ т.е. в местах сужений давление уменьшается, и наоборот. Это используется в водоструйных насосах (рис.

7.4). Давление в струе при выходе из насоса равно атмосферному, а в сужении (и в резервуаре R) значительно ниже (до 1 мм рт.ст.).

3. Поместим в жидкость изогнутую манометрическую трубку с входным отверстием, обращенным навстречу потоку жидкости (рис. 7.5, а). Такая трубка называется трубкой Пито. Скорость жидкости перед её отверстием будет равна нулю. Тогда измеряемое этой манометрической трубкой давление будет

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}.$$

Если же манометрическая трубка будет иметь отверстие, касательное к линиям тока (рис. 7.5, б), то скорость (а следовательно, и давление) вблизи таких отверстий будет мало отличаться от скорости жидкости при отсутствии трубки. Поэтому такая трубка покажет давление p_1. Если же такие трубки смонтировать вместе и соединить с манометром, который может измерять разность давлений (рис. 7.6), то с его помощью можно измерить гидродинамическое давление. Проградуировав манометр в единицах скорости, можно измерять скорость течения данной жидкости.

7.2. Движение вязкой жидкости

Во всех реальных жидкостях или газах наблюдается вязкость или, другими словами, внутреннее трение. При скольжении одного слоя жидкости по-другому возникает сопротивление движению, подобное силе трения при скольжении одного твердого тела по-другому, но подчиняющееся иному закону.

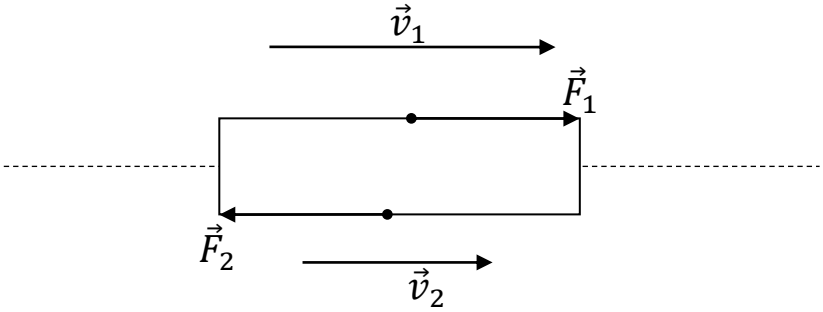
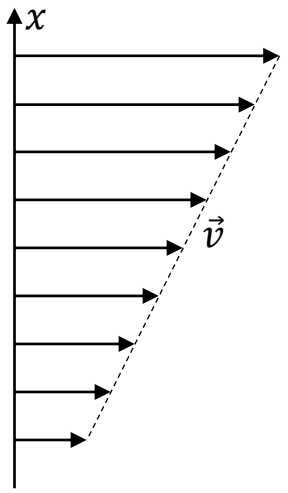
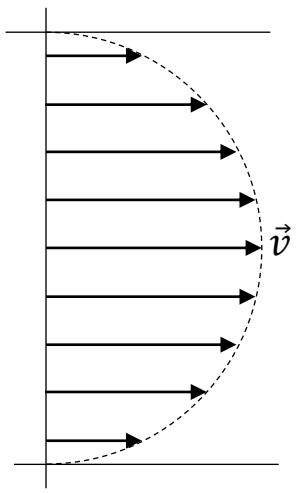


Рис. 7.7



а)

Рис. 7.8



б)

Рис. 7.9

Пусть между двумя слоями, текущими с разными скоростями ($\upsilon_1 > \upsilon_2$), находится пластинка ΔS (рис. 7.7). Верхний слой увлекает верхнюю поверхность пластинки со скоростью υ_1, а нижний слой увлекает нижнюю поверхность той же пластинки со скоростью υ_2. В результате этого пластинка движется с промежуточной по величине скоростью, причем верхний слой действует на нее с силой F_1, а нижний – F_2. Эти силы, направленные тангенциально к поверхности, есть силы внутреннего трения. Очевидно, что они будут прямо пропорциональны величине поверхности, так как складываются из элементарных сил трения, действующих на её отдельные элементарные поверхности. Кроме того, величина силы трения будет зависеть от свойств жидкости и от разности скоростей ее слоев. На самом же деле резко выраженных слоев, двигающихся с заметно различными скоростями, в жидкости нет. Скорость течения монотонно меняется вдоль оси x (рис. 7.8) и величина $\frac{dv}{dx}$ показывает, как быстро изменяется скорость в направлении оси x. Называется она градиентом скорости (точнее, это – модуль градиента скорости, сам градиент – вектор). Таким образом,

$$F_{\text{тр}} = \eta \frac{dv}{dx} \Delta S,$$

где коэффициент пропорциональности η – коэффициент внутреннего трения или коэффициент вязкости. Формула для силы внутреннего трения была впервые получена Ньютоном.

Силы вязкости проявляются особенно сильно при течении жидкостей по трубам. На рис. 7.9 показано распределение скоростей потока в трубе. Если скорость течения незначительна, то силы трения между отдельными слоями невелики, а поэтому они скользят друг относительно друга не перемешиваясь. Такое течение жидкости называется *ламинарным* (*слоистым*). *Ламинарное течение стационарно*.

При увеличении скорости потока силы трения возрастают и пары сил трения приводят жидкость во вращение, т.е. возникают вихри. При этом жидкость из одного слоя попадает в другой - возникает *перемешивание*. При таком течении направления и величины сил трения изменяются с течением времени в каждом небольшом объёме жидкости, что приводит к нарушению стационарности потока. Такое течение называется *турбулентным* (*вихревым*).

Английский физик Рейнольдс установил, что характер течения зависит от безразмерной величины, которая получила название *числа Рейнольдса* и обозначается *Re*, т.е. начальными буквами фамилии этого учёного:

$$R_e = \frac{vr\rho}{\eta},$$

где v – средняя скорость течения жидкости в трубе, а r – радиус трубы.

Выделяют случаи

1) $Re < 1000$ – течение ламинарно;
2) $Re > 2000$ – течение турбулентно;
3) $1000 < Re < 2000$ – течение неустойчиво, т.е. на отдельных участках трубы оно ламинарно, на других турбулентно, причём переход от ламинарного течения к турбулентному на отдельном участке зависит лишь от случайных толчков.

7.3. Движение тел в жидкостях и газах

При движении тел в вязкой среде возникает сопротивление. При малых скоростях и удобообтекаемой форме тела сопротивление обусловлено наличием сил трения. Согласно **закону, открытому Стоксом**, *сила сопротивления в этом случае прямо пропорциональна коэффициенту вязкости, скорости движения тела относительно жидкости и линейным размерам тела*:

$$F_c \sim \eta v l.$$

Для *шаров, движущихся в вязкой жидкости, по закону Стокса сила сопротивления*

$$F_c = 6\pi\eta ur.$$

В вязкой жидкости очень тонкий ее слой прилипает к поверхности тела и движется вместе с ним как единое целое, увлекая за собой последующие слои в результате трения (конечно, с постепенным уменьшающаяся скорость). Таким образом, тело оказывается окруженным слоем жидкости, в котором существует градиент скорости. Этот слой называется *пограничным*. Действие сил трения в поверхностном слое приводит к тому, что поток отрывается от поверхности тела, в результате чего за телом образуются вихри (рис. 7.10). Вихри уносятся потоком и постепенно затухают из-за трения. Давление в образующейся за телом вихревой области оказывается пониженным ($p_2 < p_1$). Результирующая сила давления будет направлена противоположно движению тела. Лобовое сопротивление складывается из сил трения и результирующей сил давления.

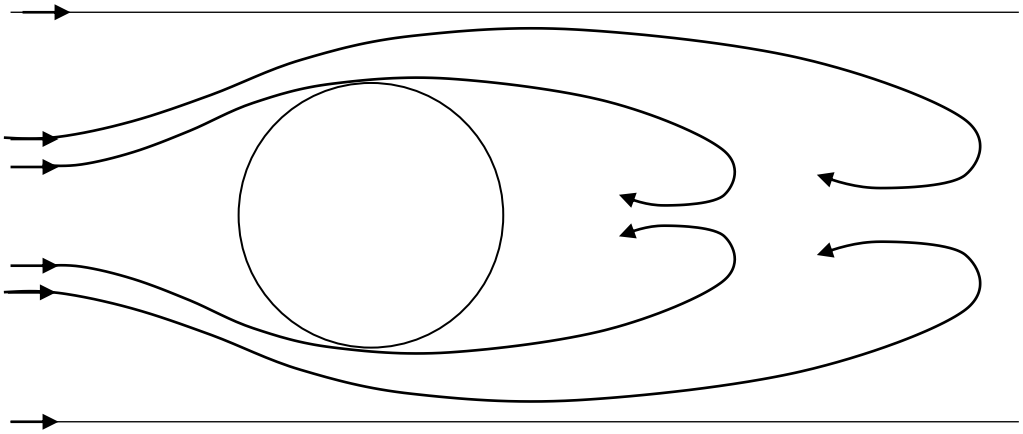


Рис. 7.10

Вихревое сопротивление можно значительно уменьшить, если телу придать форму, вытянутую в сторону, противоположную его движению. При этом место отрыва вихрей сместится к хвостовой точке тела, ширина вихревой области уменьшиться, а вместе с тем уменьшится и вихревое сопротивление. Такая форм называется удобообтекаемой. Подобную форму придают фюзеляжам и крыльям самолётов, скоростным автомобилям и т.п. Если тело, находящееся в потоке, имеет несимметричную форму или расположено под углом к потоку, то кроме лобового сопротивления возникает еще подъёмная сила. На рис. 7.11 показана картина обтекания потоком пластинки и

крыла самолёта. За крылом, а также и пластинкой, возникают вихри, в которых происходит вращение воздуха против хода часовой стрелки. Однако, до крыла (пластинки) момент количества движения воздуха был равен нулю. По закону сохранения момента количества движения он должен остаться неизменным. Чтобы это выполнилось, необходимо допустить, что вокруг крыла (пластинки) есть поток воздуха, движущийся по ходу часовой стрелки. Этот поток называется циркуляционным потоком или просто циркуляцией. В результате сложения потока воздуха с циркуляцией его скорость под крылом (пластинкой) уменьшается, а над крылом (пластинкой) увеличивается. Согласно теореме Бернулли в тех местах, где скорость течения больше, давление меньше. Поэтому давление под крылом (пластинкой) больше, чем над крылом.

Равнодействующая сил давления $\vec{R}$ показана на рис. 7.11 как для пластинки, так и для крыла. Вертикальная составляющая этой силы $\overrightarrow{F_1}$ является подъемной силой, а горизонтальная $\overrightarrow{F_2}$ – лобовым сопротивлением.

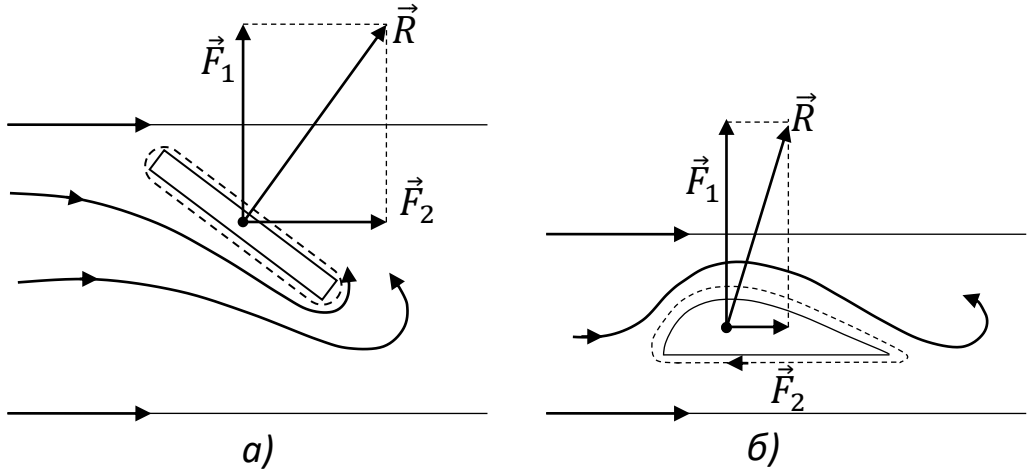


Рис. 7.11

Н.Е. Жуковскому первому удалось объяснить механизм подъемной силы, создаваемой движущимся крылом самолета. Он разработал количественные методы расчета величины подъёмной силы для различных профилей крыла. Созданные им профили, ныне называемые профилями НЕЖ, позволили проектировать крылья наивыгоднейшей формы.

7.4. Задачи

Методические указания (более подробно в п. 1.7): Решение задач на равновесие и движение жидкости (газа) рассматривается, как правило, в инерциальной системе отсчета, так как все законы темы и формулы выводятся в предположении, что и при равновесии жидкости, и при её движении, и при движении тел в жидкости (газе) силы инерции не учитываются. Физический смысл задачи данной темы раскрывается с учетом сделанных выше указаний; при движении жидкости и тел в ней называется, какой является жидкость (идеальной, реальной) и каким является течение жидкости (ламинарным, турбулентным), если учитывается её вязкость.

Чертеж задачи должен соответствовать всем требованиям, высказанным в пособии в предыдущих темах и, кроме того, содержать изображение потока жидкости (газа), рассматриваемого в задаче (его размер, форма, линии тока, трубки тока, какие-то точки линии тока и сечения трубки тока).

7.4.1. Примеры решения задач

7.1. Для пополнения запаса воды в паровозе между рельсами устраивают длинную канаву, наполненную водой. В канаву опускают с движущегося паровоза изогнутую трубу, по которой вода заливается в бак, установленный на паровозе. С какой скоростью должен двигаться поезд, чтобы вода по трубе поднималась на высоту 3,5 м и, чтобы на пути 1000 м в бак поступало 3,0 м^3 воды? Диаметр трубы в баке 10 см.

СИ

$h = 3{,}5\text{м}$

$l = 1000\text{м}$

$V = 3{,}0\text{м}^3$

$d = 10\text{см} = 0{,}10\text{м}$

$v - ?$

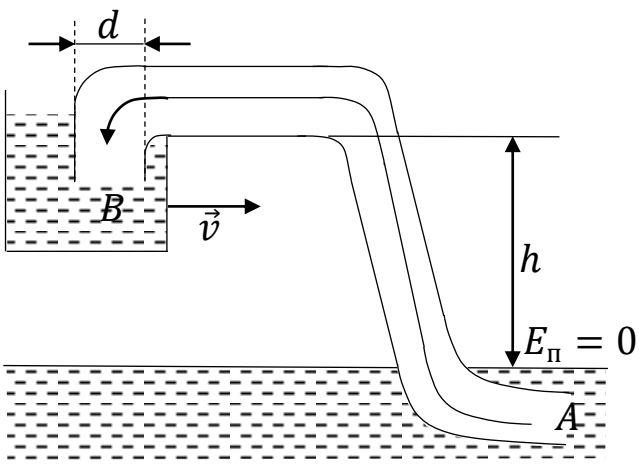


Рис. 7.12

В инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, рассматривается стационарное движение воды (будем считать ее идеальной жидкостью) в трубе. Рассмотрим в потоке воды в трубе линию тока, выбранную по оси трубы, с двумя точками *A* и *B* на входе и выходе трубы.

На рис. 7.12 изображено: изогнутая труба и в ней линия тока потока с точками *A* и *B*, бак паровоза, поверхность воды в канаве, h – высота поднятия воды в трубе при движении поезда, d – диаметр трубы в баке, υ – скорость паровоза.

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho \upsilon_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho \upsilon_2^2}{2} \quad (1),$$

$$p_1 = p_2 = p_{атм},$$

$$h_1 = 0,$$

$$\upsilon_1 = \upsilon,$$

$$h_2 = h_1,$$

$$\upsilon_2 = \frac{V}{St} \quad (2),$$

$$S = \pi \frac{d^2}{4},$$

$$t = \frac{l}{\upsilon} \quad (3)$$

В системе уравнений равенство (1) записано с использованием уравнения Бернулли, в нем левая часть относится к точке *A* линии тока, правая – к точке *B*; p_1, p_2 – статическое давление воды в указанных точках, $p_{атм}$ – давление атмосферного воздуха, h_1 , h_2 – высота положений точек *A* и *B* над уровнем нулевой потенциальной энергии, выбранным в этой задаче на поверхности воды в канаве, υ_1, υ_2 – модули

скорости воды в точках *A* и *B* потока (относительность механического движения позволяет скорость υ_1 приравнять искомой скорости поезда), по формуле (2) определяется υ_2 через объем воды *V*, поступающей в бак за время *t*, которое находим по формуле (3) в предположении равномерности движения поезда на пути *l*.

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2gh}{1-\frac{16V^2}{\pi^2 d^4 l^2}}},$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2\cdot 9{,}8\ \frac{м}{с^2}\cdot 3{,}5\ м}{1-\frac{16\cdot(3{,}0\ м^3)^2}{(3{,}14)^2\cdot(0{,}10\ м)^4\cdot(1000\ м)^2}}} = 9{,}1\ \frac{м}{с}.$$

7.2. Широкий сосуд снабжен внизу горизонтальной узкой трубкой, состоящей из двух звеньев. Первое звено имеет длину 20 см, а внутренний диаметр 1,0 мм, второе звено имеет длину 2 см и внутренний диаметр 0,5 мм. В сосуд налит глицерин, уровень которого на 10 см выше трубки. Какой объем глицерина вытекает из трубки за 60 с?

СГС

$$l_1 = 20\text{см}$$
$$d_1 = 1{,}0\text{мм} = 1{,}0\cdot 10^{-1}\text{см}$$
$$l_2 = 2\text{см}$$
$$d_2 = 0{,}5\text{мм} = 0{,}5\cdot 10^{-1}\text{см}$$
$$h = 10\text{см}$$
$$t = 20\text{с}$$
$$\eta = 3{,}5\text{П}$$
$$\rho = 1{,}2\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$$

$V-?$

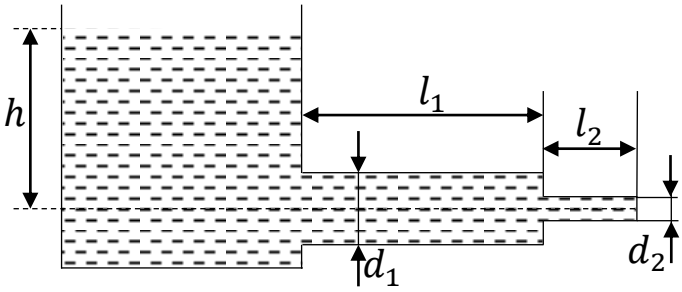


Рис. 7.13

В инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, рассматривается ламинарное течение по горизонтальной трубке глицерина (вязкой жидкости). При равномерном течении вязкой жидкости по трубке, на концах ее должна существовать разность давлений для уравновешивания сил вязкости, препятствующих течению жидкости.

На рис. 7.13 изображено: горизонтальная трубка, состоящая из двух звеньев с указанием их размеров, сосуд, наполненный глицерином до высоты h.

$\rho gh = \Delta p_1 + \Delta p_2$ (1),

$V_1 = \frac{\pi \ r_1^4 t \Delta p_1}{8 l_1 \eta}$ (2),

$V_2 = \frac{\pi \ r_2^4 t \Delta p_2}{8 l_2 \eta}$ (3),

$r_1 = \frac{d_1}{2}$,

$r_2 = \frac{d_2}{2}$,

$\upsilon_1 = \upsilon_2$ (4)

В системе уравнений формула (1) следует из рассмотренного выше физического смысла задачи; левая часть формулы ρgh представляет собой весовое давление глицерина высотой h, Δp_1 – падение давления в глицерине на расстоянии l_1, Δp_2 – падение давления в глицерине на расстоянии l_2, формула Пуазейля записана для обоих звеньев трубки (2) и (3), формула (4) следует из стационарности ламинарного течения глицерина. При написании формулы (1) атмосферное давление, действующее на свободную поверхность глицерина в сосуде, не учитывается, так как на выходе трубки тоже действует атмосферное давление. Значение коэффициента динамической вязкости η и плотности глицерина ρ взяты из таблиц физических величин при комнатной температуре.

$$V = \frac{\rho g h \pi r_1^4 r_2^4 t}{8\eta(l_1 r_2^4 + l_2 r_1^4)},$$

$$V = \frac{1{,}2 \ \frac{г}{см^3} \cdot 980 \ \frac{см}{с^2} \cdot 10 \ см \cdot 3{,}14 (\frac{1{,}0}{2} \cdot 10^{-1} \ см)^4 (\frac{0{,}5}{2} \cdot 10^{-1} \ см)^4 \cdot 60 \ с}{8 \cdot 3{,}5 \ \frac{г}{см \cdot с} (20 \ см (\frac{0{,}5}{2} \cdot 10^{-1} \ см)^4 + 2 \ см (\frac{1{,}0}{2} \cdot 10^{-1} \ см)^4)} = 0{,}01 \ см^3$$

7.4.2. Задачи для самостоятельного решения

7.3. Максимально допустимая скорость течения воды в трубе $v_{max} = 3 \frac{м}{с}$. Чему равен минимальный диаметр трубы D_{min} при расходе воды $V = 5 \cdot 10^3$ м^3 за $t = 1$ ч?

7.4. Сосуд с водой, двигаясь равноускорено без начальной скорости, проходит расстояние $S = 10$ м за $t = 10$ с. Под каким углом α к горизонту расположится при этом поверхность воды? Чему равно

гидростатическое давление воды p в точке M, расположенной на расстоянии $l = 4$ см от поверхности жидкости по горизонтали. Чему равна выталкивающая сила $F_{\text{А}}$, действующая на тело объемом $V = 1$ см^3, погруженное в этот сосуд? Плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

7.5. Определить минимальную мощность насоса N, поднимающего воду в трубе на высоту $H = 10$ м, если площадь поперечного сечения трубы $S = 12$ см^2 и за каждую $t_1 = 1$ с насос поднимает $m_1 = 8$ кг воды. Плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

7.6. У нижнего отверстия вертикальной трубы с уменьшающимся вверх сечением скорость потока $v_1 = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}$ и давление в потоке $p_1 = 2$ атм, а у верхнего отверстия скорость потока $v_2 = 2\frac{\text{м}}{\text{с}}$ и давление $p_2 = 0{,}5$ атм. Какова высота трубы h? Каков диаметр верхнего отверстия D_2, если диаметр нижнего $D_1 = 15$ см? Плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

7.7. С какой скоростью вытекает вода из малого отверстия в дне открытого сосуда, если высота слоя воды $H_1 = 10$ см, а поверх нее налит слой керосина высотой $H_2 = 8$ см? Плотность воды $\rho_1 = 1 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность керосина $\rho_2 = 0{,}8 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

7.8. В сосуд каждые $t = 5$ с поступает $m = 5$ кг воды. На дне сосуда имеется круглое отверстие, через которое поступающая вода вытекает. Уровень воды в сосуде располагается на высоте $h = 50$ см от дна. Чему равен диаметр отверстия D? Плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

7.9. На горизонтальной поверхности стоит цилиндрический сосуд с водой плотностью ρ. В боковой стенке сосуда у дна имеется отверстие диаметром d. В тот момент, когда высота столба воды в сосуде была равна h, к сосуду приложили горизонтальную силу F, чтобы удержать его на месте. Найти коэффициент трения k между дном со-

суда и поверхностью, если площадь его дна S, а весом самого сосуда можно пренебречь.

7.10. В дне цилиндрического сосуда, доверху наполненного водой, проделали отверстие, площадь которого S_1 значительно меньше площади дна сосуда. Чему будет равна площадь поперечного сечения струи S_2, вытекающей из сосуда, на расстоянии h ниже его дна, если масса воды в сосуде m, диаметр дна D и плотность воды ρ.

7.11. С каким ускорением a опускается лифт, если высота столбика ртути в нем $h = 1{,}2$ м? Атмосферное давление $p_{\text{атм}}$ нормальное. Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

7.12. На поршень шприца площадью S_1 действует сила F. С какой скоростью v_2 будет вытекать в горизонтальном направлении из отверстия в игле площадью S_2 струя жидкого лекарства плотностью ρ (рис. 7.14).

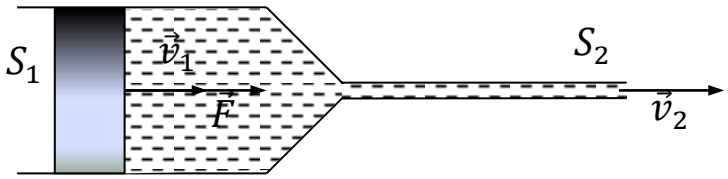


Рис. 7.14

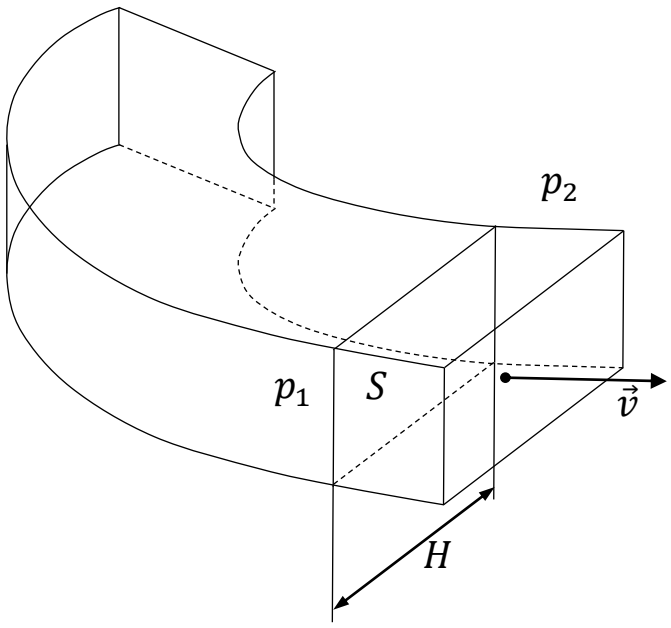


Рис. 7.15

7.13. По каналу прямоугольного сечения с радиусом закругления $R = 40$ м течет вода (рис.7.15). При этом измерения показывают, что у наружной и внутренней стенок канала перепад давления составляет $\Delta p = 2$ мм. рт. ст.. Определить скорость v воды в канале. Ширина канала $H = 4$ м. Плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Глава 8. МЕХАНИКА КОСМИЧЕСКИХ ПОЛЕТОВ

8.1. Принцип реактивного движения

В предыдущей главе мы применяли к стационарному потоку невязкой жидкости закон сохранения энергии и ввели уравнение Бернулли. Применим к этому же потоку второй закон динамики в формулировке Ньютона.

Начальное количество движения жидкости, заключенной между сечениями S_1 и S_2 (рис. 7.2) обозначим через $K_{S_1S_2}$, а конечное количество движения той же жидкости, когда она займет положение между сечениями $S'_{1,}$, и S'_2,- через $K_{S'_1S'_2}$. Определим изменение количества движения рассматриваемой жидкости ΔK.

Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые мы делали, определяя изменение энергии жидкости при выводе теоремы Бернулли, получим, что

$$\Delta K = K_{S'_2S'_2} - K_{S'_1S'_1}.$$

Через сечения S_1 за промежуток времени dt пройдет жидкость массой

$$dm_1 = \rho S_1 v_1 dt.$$

Через сечение S_2 за тот же промежуток времени пройдет жидкость массой

$$dm_2 = \rho S_2 v_2 dt.$$

Применив теорему о неразрывности струи, получим:

$$dm_1 = dm_2.$$

Количество движения жидкости, заключенной между сечениями S_1 и S'_1, будет

$$dm_1\overrightarrow{v_1} = \rho S_1 v_1 dt\overrightarrow{v_1}.$$

Количество движения жидкости, заключенной между сечениями S_2 и S'_2, будет

$$dm_2\overrightarrow{v_2} = \rho S_2 v_2 dt\overrightarrow{v_2}.$$

Изменение количества движения жидкости должно быть равно импульсу результирующей внешних сил:

$$(\rho S_2 v_2\overrightarrow{v_2} - \rho S_1 v_1\overrightarrow{v_1})\, dt = \vec{F}\, dt.$$

По третьему закону Ньютона текущая жидкость действует на стенки трубы с силами, равнодействующая которых называется реактивной силой:

$$\overrightarrow{F_R} = - \vec{F}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{F_R} = \rho S_1 v_1 (\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}).$$

Полученная формула позволяет рассчитывать **реактивную силу**, возникающую при движении жидкости. Она будет справедливой и для движущихся газов. Рассмотрим несколько примеров ее применения.

1. *Реакция вытекающей струи*. В очень широком сечении S_1 (рис. 8.1) скоростью течения можно пренебречь. Тогда

$$\overrightarrow{F_R} = -\rho S_2 v_2 \overrightarrow{v_2},$$

т.е. реактивная сила будет направлена в сторону противоположную вектору скорости истечения жидкости из сосуда. Рассчитаем величину реактивной силы

$$F_R = \rho S_2 v_2^2.$$

Применив формулу Торричелли, найдем, что

$$F_R = \rho S_2 \cdot 2gh = 2S_2 p,$$

где p – гидростатическое давление на глубине, на которой расположено отверстие.

Реакция вытекающей струи используется в водометных судовых двигателях. Насос засасывает забортную воду и выбрасывает ее за корму в горизонтальном направлении. В результате этого на судно действует реактивная сила в направлении, противоположном выбросу струи.

2. *Использование силы реакции струи в турбинах*. В различных по устройству турбинах вода попадает на изогнутые лопатки колеса и, обтекая их, изменяет направление движения.

Рассмотрим случай, когда идеальная жидкость течет по трубе постоянного сечения, согнутой под углом 90°С (рис.8.2), с неизменной по величине скоростью. В этом случае реактивная сила

$$\overrightarrow{F_R} = \rho S v_1 (\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}).$$

По правилу вычитания векторов найдем направление вектора разности скоростей (рис. 8.2, б). В том же направлении будет действовать на трубу реактивная сила (рис. 8.2, а). Ее величина

$$F_R = \sqrt{2}\rho S v_1^2.$$

Конечно, приведенный выше расчет реактивной силы можно приложить к потоку воды, обтекающей лопатку турбины, лишь приближенно; тем не менее он показывает, что значительно выгоднее использовать обтекание жидкостью лопатки турбины, чем прямой удар воды в нее. Действительно, считая, что при ударе вода останавливается, мы получим:

$$F_R = \rho S v_1^2.$$

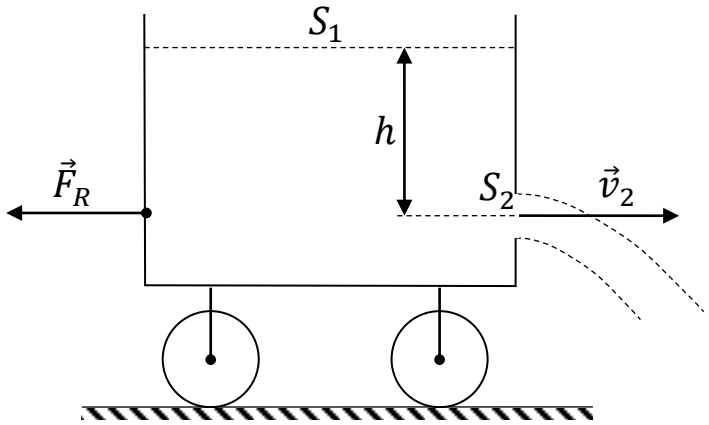


Рис. 8.1

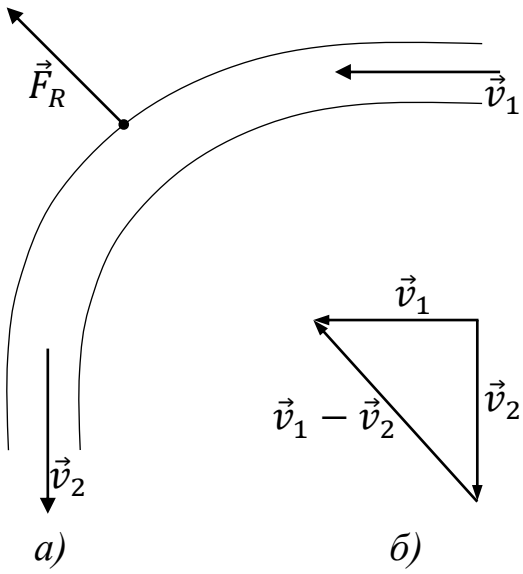


Рис. 8.2

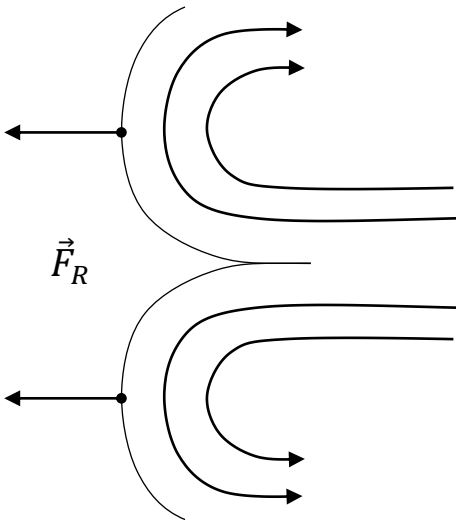


Рис. 8.3

Лопатки турбины Пельтона имеют в разрезе форму, показанную на рис. 8.3. Струя воды, попадая на лопатку, разделяется на две части. Каждая из них скользит по ее поверхности и стекает с них в направлении, противоположном направлению падающей струи.

Если лопатка неподвижна или движется очень медленно, то можно считать, что $v_1 \approx v_2$ и величина реактивной силы $F_R = 2\,\rho S v_1^2$.

Если же лопатка движется достаточно быстро, то формула реактивной силы справедлива только в системе отсчета, связанной с лопаткой. Тогда

$$F_R = \rho S v\,(v' - v'').$$

где v' - скорость падающей воды относительно лопатки, а v'' – скорость стекания воды относительно лопатки.

Если скорость воды в неподвижной системе отсчета принять за u, а скорость лопатки за v, $v' = u - v$, а $v'' = v - u$.

Реактивная сила, выраженная через скорости относительно неподвижной системы отсчета, будет

$$F_R = 2\rho S u(u - v).$$

Мощность, развиваемая турбиной с указанным выше типом лопаток,

$$N = F_R v = 2\rho S u(u - v)v.$$

Реактивным движением можно назвать всякое движение, возникающее в результате реакции вытекающей струи жидкости или газа. Реактивным можно назвать и движение судна или самолета, так как винт создает струю воды или воздуха. Однако, термин реактивное движение» часто применяют в более узком смысле, имея в виду только движение ракет. В камере двигателя ракеты происходит быстрое сгорание горючей смеси и образовавшиеся при этом газы с большой скоростью (так как давление в камере высоко) выбрасываются через отверстие (сопло) в хвосте ракеты. Возникающая при этом реактивная сила сообщает ракете ускорение.

8.2. Движение тел с переменной массой

До сих пор мы считали, что масса тела при его движении не изменяется. Однако в целом ряде случаев масса движущегося тела уменьшается. Так, например, массы автомашины, поливающей водой улицу, метеоритного тела придвижении в атмосфере, дрейфующей льдины, ракеты и т.п. уменьшаются в процессе движения.

Законы движения тел с переменной массой были открыты И.В.Мещерским и К.Э. Циолковским.

Выведем уравнение поступательного движения тела переменной массы на примере ракеты. При этом будем считать, что ее масса изменяется непрерывно со временем, т.е. ракета одноступенчатая. Это позволит нам дифференцировать массу, как непрерывную функцию времени.

Пусть в момент времени t ракета имела массу m и абсолютную скорость $\vec{v}$ (рис. 8.4). В момент времени $t + dt$ ее массы стала $m+dm$, а скорость – $\vec{v} + d\vec{v}$. При этом от ракеты отделилась масса dm с абсолютной скоростью – $\overrightarrow{v_1}$.

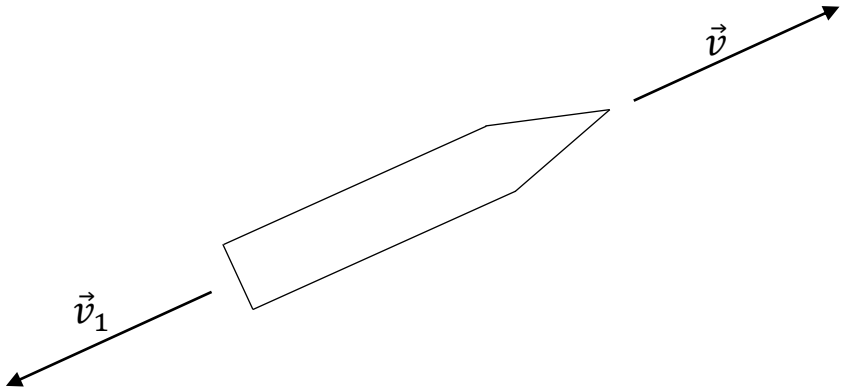


Рис. 8.4

Применим к данной системе второй закон Ньютона:

$$(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - m\vec{v} - \overrightarrow{v_1}\, dm = \vec{F}\, dt,$$

где $\vec{F}$ – равнодействующая внешних по отношению к рассматриваемой системе сил.

После преобразования получаем:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + (\overrightarrow{v_1} - \vec{v})\frac{dm}{dt}.$$

Величина $\overrightarrow{v_1} - \vec{v} = \vec{u}$ является относительной скоростью частиц dm, т.е. их скоростью относительно ракеты. Тогда

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{u}\frac{dm}{dt} \quad -$$

это уравнение выражает **основной закон механики для поступательного движения тела переменной массы и называется уравнением Мещерского**. Можно легко показать, что второй член в правой части равенства является реактивной силой:

$$\vec{u}\frac{dm}{dt} = -\vec{u}\frac{\rho u S\, dt}{dt} = -\rho u S\vec{u} = \overrightarrow{F_R}.$$

Знак минус поставлен потому, что в рассматриваемом случае приращение массы отрицательно.

Уравнение Мещерского можно написать и в виде

$$m\vec{a} = \vec{F} + \overrightarrow{F_R}.$$

Найдем скорость ракеты в случае ее прямолинейного движения в пустоте при отсутствии внешних сил. Это одна из задач, сформулированных и решенных в свое время К.Э. Циолковским.

Так как внешние силы отсутствуют, то уравнение Мещерского примет вид:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}\frac{dm}{dt}.$$

Проектируя это векторное равенство на ось, совпадающую с вектором скорости, мы получим:

$$m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt}.$$

Откуда

$$dv = -u\frac{dm}{m}.$$

При постоянном режиме двигателя $u = const$. Найдем скорость движения ракеты:

$$v = -u\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} = -u\,ln\frac{m}{m_0} \text{ или } v = u\,ln\frac{m_0}{m}.$$

Здесь m_0 – масса ракеты в момент старта, а m – ее масса в момент времени, когда ее скорость равна v.

8.3. Первая, вторая и третья космические скорости

Определение. Под *первой космической скоростью* понимают такую скорость, при которой тело обращает вокруг Земли по круговой траектории

$$v_{1к} = \sqrt{gR}.$$

Однако, величина ускорения свободного падения изменяется в зависимости от высоты. Определив его значение из формулы закона всемирного тяготения, можно записать так:

$$v_{1к} = \sqrt{\gamma\frac{M}{R}}.$$

Величина первой космической скорости зависит от радиуса орбиты, который отсчитывается от центра Земли. Чем больше радиус

орбиты, тем меньше значение первой космической скорости. Однако, если честь работу, необходимую для поднятия спутника и преодоления сопротивления атмосферы, то окажется, что чем больше радиус орбиты, тем больше потребуется энергии для выведения для нее спутника.

Первая космическая скорость согласно теореме сложения скоростей равна $\overrightarrow{v_{1к}} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$, где $\overrightarrow{v_1}$ – скорость ракеты относительно Земли, а $\overrightarrow{v_2}$ – линейная скорость точки, в которой производится запуск.

Очевидно, наиболее выгодным является запуск ракеты на экваторе в сторону вращения Земли, а наименее выгодным – в противоположную сторону.

Если телу сообщить скорость, несколько большую первой космической, то она будет двигаться по эллиптической траектории. Однако, для запуска искусственного спутника Земли недостаточно сообщать ему первую космическую скорость – необходимо, чтобы она была горизонтальной, т.е. угол бросания должен быть равен нулю. Если угол бросания не равен нулю, то часть траектории, которая является замкнутой линией, обязательно пройдет внутри земного шара (рис. 8.5). Поэтому создать искусственный спутник Земли, например, выстрелом из орудия невозможно. Для этой цели пригодна управляемая ракета, которая поднимет спутник на определенную высоту и сообщит ему необходимую скорость в горизонтальном направлении. Обычно ракеты запускаются вертикально. В этом направлении толщина плотных слоев атмосферы минимальна. Желательно, чтобы скорость ракеты при прохождении через плотные слои атмосферы не была большой, так как сила сопротивления воздуха возрастает с увеличением скорости. После прохождения плотных слоев атмосферы ракета на заданной высоте переходит на горизонтальный полет (рис. 8.6) и разгоняет спутник до нужной скорости.

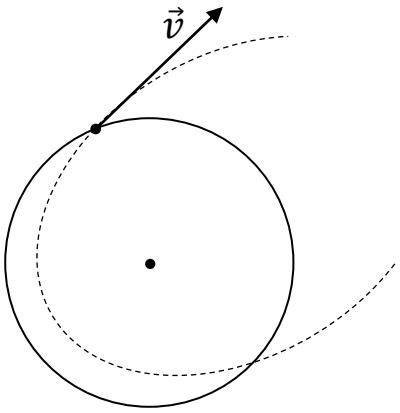


Рис. 8.5

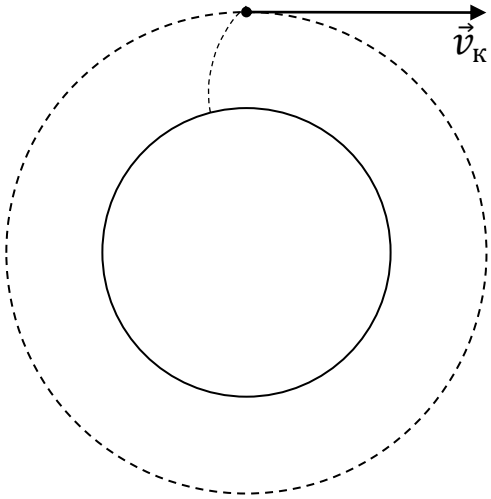


Рис. 8.6

Определение. *Второй космической скоростью* называют такую наименьшую скорость, при которой орбита тела станет параболической, т.е. оно перестанет обращаться вокруг Земли.

Для этого тело должно выйти из сферы земного притяжения. Поэтому при расчете второй космической скорости нужно вычислить работу, необходимую для удаления тела с поверхности Земли в бесконечность. Мы уже доказывали, что величина работы в поле силы тяжести не зависит от формы пути, а поэтому направление запуска ракеты в данном случае не играет никакой роли.

В результате совершения работы ракете будет сообщена кинетическая энергия. Согласно закону сохранения энергии сумма кинетической и потенциальной энергий в любой точке траектории будет величиной постоянной, равной полной энергии:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma\frac{mM}{R}.$$

При удалении тела в бесконечность ($R = \infty$) вполне достаточно, чтобы его скорость в бесконечно удаленной точке была равна нулю. Тогда полная энергия тела в бесконечности

$$E = 0.$$

Поскольку полная энергия будет сохраняться в любой точке траектории, то у поверхности Земли

$$\frac{mv_{2k}^2}{2} = \gamma\frac{mM}{R},$$

где R – радиус Земли, а v_{2k} – скорость, необходимая для удаления тела в бесконечность, т.е. вторая космическая скорость.

Найдем её значение:

$$v_{2k} = \sqrt{\gamma \frac{2M}{R}}.$$

Сравнивая величины первой и второй космических скоростей, замечаем, что

$$v_{2k} = v_{1k}\sqrt{2} \simeq 11{,}2\text{км/сек}.$$

Определение. *Третьей космической скоростью* называют минимальную скорость, которую нужно сообщить телу на Земле, чтобы оно покинуло пределы солнечной системы.

Как показывает расчёт, для этого нужно телу в системе отсчёта, связанной с Солнцем, сообщить скорость 46,5 км/сек. Земля движется по орбите относительно Солнца со скоростью 29,8 км/сек поэтому, если ракету запустить в направлении движения Земли вокруг Солнца, то третья космическая скорость будет равна 16,7 км/сек.

Впервые с космическими скоростями стали летать советские ракеты. 4 октября 1957 г. в Советском Союзе был осуществлен первый в истории человечества успешный запуск искусственного спутника Земли и тем самым достигнута первая космическая скорость. 2 января 1959 г. была достигнута и вторая космическая скорость: наша ракета вышла из сферы земного притяжения и стала первой искусственной планетой солнечной системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Механику Ньютона часто называют классической механикой. Проверенная многовековой практикой человечества в случаях движения макроскопических тел при не слишком больших скоростях, она многим ученым XIX века казалась абсолютной и универсальной. Однако целый ряд открытий в конце XIX века и особенно в начале XX оказалось невозможным объяснить, опираясь на законы классической механики.

Прежде всего было обнаружено, что масса, принимаемая в классической механике неизменной, зависит от скорости движения. Масса движущегося тела m превышает массу покоящегося того же тела m_0 и изменяется в зависимости от скорости его движения v по закону:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где c – скорость распространения света в вакууме.

Скорости движения тел в земных условиях, как бы они не были велики, всегда остаются много меньшими скорости света. Так, например, первая и вторая космические скорости, не говоря уже о скоростях пули, поезда, автомобиля, во много раз меньше скорости света. В связи с этим изменение массы в результате движения будет столь незначительными, что не может быть определено экспериментальным путем. Подтвердим это простым расчетом. Пусть тело с массой покоя 100 кг движется со скоростью 30 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$ (в условиях Земли такая скорость считается очень большой), тогда $\frac{v^2}{c^2} = 10^{-8}$, а разность массы движения и массы покоя будет составлять всего 0,5 мг! Совершенно очевидно, что изменение массы меньше, чем возможная погрешность при ее измерении. Другими словами, мы в данном случае можем считать массу неизменной с точностью до $0{,}5 \cdot 10^{-8}$, т.е. с такой степенью точности будут выполнять законы классической механики.

Таким образом, законы классической механики применимы лишь в случае, когда $v \ll c$.

Законы движения тел с любым скоростями (но меньшими скоростями света) рассматриваются релятивистской механикой (теорией

относительности), основоположником которой является А. Эйнштейн.

В классической механике рассматриваются два основных вида движения:

1) движение материальной точки (или тела) по некоторой траектории в пространстве, характеризуемое в каждый момент времени положением точки (т.е. ее координатами) и ее скоростью;

2) волновое движение, для которого понятие траектории отсутствует.

Эти движения являются взаимоисключающими.

В 1927 г была обнаружена дифракция электронов, а несколько позднее и ряда других элементарных частиц, и даже некоторых атомов. Следовательно, частицы микромира имеют волновые свойства. Наличие же волновых свойств приводит к невозможности указания определенной траектории микрочастицы и ее скорости в определенный момент времени. В связи с этим движение микрочастиц не будет подчиняться законам Ньютона.

Если же движение микрочастиц характеризовать физическими величинами, присущими макромиру, то это можно сделать лишь с определенными приближениями: координату микрочастицы – с точностью до Δx, а ее скорость – с точностью до Δv_x. Соотношение между неопределенностями в положении и скорости микрочастицы называется соотношением неопределенности Гейзенберга:

$$\Delta v_x \cdot \Delta x = \frac{h}{m},$$

где h = 6,62 Дж·с (постоянная Планка), а m – масса микрочастицы.

Физический смысл этого соотношения состоит в том, что оно устанавливает границу применимости классической механики к микромиру. Если частица имеет достаточно большую массу (порядка граммов), то неопределенности ее положения и скорости будут так малы, что окажутся значительно меньше возможных погрешностей при их измерениях.

Таким образом, классическая механика не является универсальной и имеет определенные границы применимости. Она справедлива только при рассмотрении движений макротел со скоростями, много меньшими скорости света.

СПИСОК БИБЛИОГРАФИЧЕСКИХ ССЫЛОК

1. Тюрин Ю.И. Ч.1. Механика.: учебное пособие для технических университетов / Ю.И. Тюрин, И.П. Чернов, Ю.Ю. Крючков.– Томск: Изд-во Томского ун-та, 2002. – 502 с.

2. Бондарев Б.В. Курс общей физики. В 3 кн.: учебное пособие / Б.В. Бондарев, Н.П. Калашников, Г.Г. Спирин. – 2-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2005. – 352 с.

3. Калашников Н.П. Основы физики. В 2 т.: учебник для вузов / Н.П. Калашников, М.А. Смондырев. – 3-е изд., стер. – М.: Дрофа, 2007.

4. Савельев И.В. Курс общей физики. В 5 кн.: учебное пособие для вузов / И.В. Савельев. – М.: АСТ Астрель, 2006. – 336 с.

5. Матвеев А.В. Механика и теория относительности: учебное пособие. – 4-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2009. – 336 с.

6. Трофимова Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов. – Изд. 14-е, перераб. и доп. / Т.И. Трофимова. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 560 с.

7. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учебное пособие для вузов. В 5 т.– 3-е изд., стер. / Д.В. Сивухин – М.: Физматлит, 2006. – 560 с.

8. Чернов И.П. Физика: сборник задач. Часть 1. Механика: учебное пособие / И.П. Чернов, В.В. Ларионов, Ю.И. Тюрин. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 2004. – 390 с.

9. Детлаф А.А. Курс физики: учебное пособие для втузов. – 4-е изд., испр. / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высш. шк., 2002. – 718 с.

10. Дмитриева В.Ф., В.Л. Прокофьев. Основы физики: учебное пособие для студентов вузов. – 4-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2009. – 527 с.

11. Иванов Б.М. Законы физики. – М.: Наука, 1989. – 591 с.

12. Грибов Л.А., Прокофьева Н.И. Основы физики: учебник. – 3-е изд. – М.: Гардарина, 1998. – 564 с.

13. Ремезов А.Н., Потапенко А.Я. Курс физики: учебник для вузов. – М.: Дрофа, 2002. – 720 с.

14. Макаренко Г.М. Физика. Механика. Основы молекулярной физики и термодинамики. Т. 1. – Мн.: Дизайн ПРО, 1997. – 176 с. 345

15. Иродов И.Е. Задачи по общей физике – 12 изд., стер. / И.Е. Иродов, СПб.: «Лань», 2007. – 416 с.

16. Чертов В.Г. Задачник по физике. 8 изд., перераб. и доп. / В.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2007 – 640 с.

Учебное электронное издание

МОКРОВА Альбина Андреевна
КОЗЛИКОВ Роман Алексеевич
ГОНЧАРОВ Александр Васильевич

МЕТОДИЧЕСКИЕ
РЕКОМЕНДАЦИИ
ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ
ПО ФИЗИКЕ
Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10;
Adobe Reader; дисковод CD-ROM.

Тираж 25 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Кафедра физико-математического образования и информационных технологий
albina.mokrova@yandex.ru

Методические материалы рассмотрены и утверждены на заседании учебно-методической комиссии Педагогического института ВлГУ

протокол № 1 от 26 апреля 2022 г.

Председатель комиссии_____ (Артамонова М.В.)